COPPE/UFRJ

Laboratório de Redes de Alta Velocidade -- RAVEL

Modelos Discretos Para Avaliação de Arquiteturas de Comutadores ATM

Luís Felipe Magalhães de Moraes -- Coordenador

Guilherme de Melo Batista Domingues

Relatório Técnico Ravel/03-97

18/04/97

1) Introdução :

Considera-se que o eixo dos tempos esteja subdividido em segmentos contínuos, consecutivos e de mesma duração. Supõe-se que o sistema seja composto por uma fila com disciplina de serviço *FCFS* e por um servidor. As chegadas e as partidas só poderão ocorrer no início dos segmentos e o estado do sistema será dado, a cada segmento, pelo número de usuários que estão presentes ao sistema.

Quando, no segmento (n-1), houver usuários no sistema que já estejam esperando pelo início dos seus serviços e ocorrer, no n-ésimo segmento, uma partida, um dos usuários que já estavam esperando será retirado da fila. O seu serviço será iniciado imediatamente.

Quando, no segmento (n-1), não houver usuários no sistema que já estejam esperando pelo início dos seus serviços e ocorrerem, no n-ésimo segmento, tanto uma partida quanto uma chegada, um novo serviço será iniciado imediatamente. O mesmo acontecerá se usuários chegarem no n-ésimo segmento e encontrarem um sistema que já estava vazio no segmento (n-1).

Nos sistemas com capacidade finita, o número máximo de usuários que poderão ser admitidos, a cada segmento, corresponderá ao número total de posições vazias que já existia no segmento precedente. Neste caso, diz-se que o sistema possui substituição atrasada, uma vez que sempre haverá, ao menos, uma posição vazia quando um usuário que já estava esperando tiver o seu serviço iniciado.

Nos sistemas com prioridade, os usuários podem pertencer a uma dentre M classes de prioridade distintas. Os usuários da classe 1 possuirão a maior prioridade, enquanto que os usuários da classe M possuirão a menor prioridade. Na ocorrência de uma partida, se houver usuários da classe de prioridade m_1 e da classe de prioridade m_2 esperando no sistema, com $m_1 < m_2$, o serviço de um usuário da classe de prioridade m_1 será iniciado.

Se um usuário da classe de prioridade m_2 estiver sendo servido e ocorrer a chegada de usuários da classe de prioridade m_1, com $m_1 < m_2$, o serviço do usuário da classe de prioridade m_2 será interrompido e o serviço de um dos usuários da classe de prioridade m_1 que chegou será iniciado. Neste caso, diz-se que o sistema opera com preempção. Um sistema que não possui classes de prioridade será equivalente a um sistema com apenas uma classe de prioridade.

Para $m = 1, 2, \ldots, M$, os usuários da *m*-ésima classe de prioridade que chegam ao sistema no n_1-ésimo segmento serão servidos antes dos usuários da *m*-ésima classe de prioridade que chegam ao sistema no n_2-ésimo segmento, quando $n_1 < n_2$. Os usuários da *m*-ésima classe de prioridade que chegam ao sistema em um mesmo segmento formarão um grupo. Os usuários de um mesmo grupo serão ordenados de forma aleatória no sistema. O k_1-ésimo usuário de um grupo será servido antes do k_2-ésimo usuário deste grupo, quando $k_1 < k_2$.

Supõe-se que o número de grupos que chegam ao sistema, a cada segmento, seja uma variável aleatória de Bernoulli com taxa *p*. Desta forma poderá ocorrer a chegada de no máximo um grupo com probabilidade *p*, ou de nenhum grupo com probabilidade (1 - *p*) , a cada segmento, independente do que já tenha ocorrido nos segmentos anteriores.

Seja A_n a variável aleatória que representa o número total de usuários que chegam ao sistema no *n*-ésimo segmento. Supõe-se que, para $n \geq 1$, A_n seja uma variável aleatória *iid*. Para $n \geq 1$, define-se :

$$a_k = P\left(A_n = k\right) \qquad ; \quad k \geq 0 \tag{1}$$

Seja *T* a variável aleatória que representa o intervalo entre a chegada de dois grupos consecutivos ao sistema e seja t_k a probabilidade de que esta variável assuma o valor *k* $(k \geq 1)$. O valor de t_k , para $k \geq 1$, será dado por :

$$t_k = a_0{}^{k-1}\left(1 - a_0\right) \tag{2}$$

Seja $A^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{A_n}\right)$ a função característica da variável aleatória A_n e sejam $\overline{A} = \mathrm{E}\left(A_n\right)$ e $\overline{A^2} = \mathrm{E}\left(A_n^2\right)$ os seus dois primeiros momentos. Para $n \geq 1$, pode-se chegar à expressão de $A^*(z)$ e aos valores de $\overline{A}$ e de $\overline{A^2}$ por intermédio de :

$$A^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k a_k \tag{3}$$

$$\overline{A} = A^{*\,'}(1) \tag{4}$$

$$\overline{A^2} = A^{*\,'}(1) + A^{*\,''}(1) \tag{5}$$

Seja H_n a variável aleatória que representa o tamanho do grupo que chega ao sistema no n-ésimo segmento $(n \geq 1)$. Como A_{n_1} e A_{n_2} $(n_1 \neq n_2)$ são duas variáveis aleatórias identicamente distribuídas, tem-se que H_{n_1} e H_{n_2} também serão duas variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Para $n \geq 1$, define-se :

$$h_k = P(H_n = k) \qquad ; \; k \geq 1 \qquad (6)$$

Os valores de h_k , para $k \geq 1$, serão dados por :

$$h_k = \frac{a_k}{(1 - a_0)} \qquad (7)$$

Sejam $H^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{H_n}\right)$ a função característica da variável aleatória H_n e $\overline{H} = \mathrm{E}(H_n)$ o seu primeiro momento. Para $n \geq 1$, a expressão de $H^*(z)$ e o valor de $\overline{H}$ serão dados, respectivamente, por :

$$H^*(z) = \frac{A^*(z) - a_0}{1 - a_0} \qquad (8)$$

$$\overline{H} = H^{*\,'}(1) = \frac{\overline{A}}{1 - a_0} \qquad (9)$$

Seja B_i a variável aleatória que representa o número total de segmentos em que o i-ésimo usuário $(i \geq 1)$ que chega ao sistema permanece em serviço. Supõe-se que, para $i \geq 1$, B_i seja uma variável aleatória *iid*. Para $i \geq 1$, define-se :

$$b_k = P(B_i = k) \qquad ; \; k \geq 1 \qquad (10)$$

Sejam $B^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{B_i}\right)$ a função característica, $\overline{B} = \mathrm{E}\left(B_i\right)$ o primeiro momento e $\overline{B^2} = \mathrm{E}\left(B_i^2\right)$ o segundo momento da variável aleatória B_i. Para $i \geq 1$, a expressão de $B^*(z)$ e os valores de $\overline{B}$ e de $\overline{B^2}$ serão dados, respectivamente, por :

$$B^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k b_k \qquad (11)$$

$$\overline{B} = B^{*\,'}(1) \qquad (12)$$

$$\overline{B^2} = B^{*\,'}(1) + B^{*\,''}(1) \qquad (13)$$

2) Chegadas em Grupo, Tempo entre a Chegada de Grupos Geometricamente Distribuído, Serviço Genérico, 1 Servidor, Capacidade Infinita (*Geom*$^{[X]}$ / *G* / *1*) [1 , 2] :

Seja N_i a variável aleatória que representa o número total de usuários que chegaram ao sistema nos segmentos que sucederam os de serviço do *i*-ésimo usuário $(i \geq 1)$ que partiu. Como A_{n_1} e A_{n_2} $(n_1 \neq n_2)$ são duas variáveis aleatórias identicamente distribuídas, tem-se que N_{i_1} e N_{i_2} $\left(i_1 \neq i_2\right)$ também serão duas variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Para $i \geq 1$, define-se :

$$n_k = P\left(N_i = k\right) \qquad ; k \geq 0 \qquad (13)$$

Seja $N^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{N_i}\right)$ a função característica da variável aleatória N_i. Para $i \geq 1$, a expressão de $N^*(z)$ poderá ser obtida a partir das seguintes equações :

$$N^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A^*(z)\right]^k b_k \qquad (14)$$

$$N^*(z) = B^*\left(A^*(z)\right) \qquad (15)$$

Seja ρ o número médio de usuários que chegam durante o serviço de um usuário. O valor de ρ será dado por :

$$\rho = N^{*'}(1) = B^{*'}\left(A^{*}(1)\right)A^{*'}(1) \qquad (16)$$

$$\rho = \overline{B}\overline{A} \qquad (17)$$

2.1) Número de Usuários no Sistema em regime estacionário [1] :

Seja Π_i a variável aleatória que representa o número total de usuários que estão presentes ao sistema quando o i-ésimo usuário $(i \geq 1)$ que chegou parte. Em regime estacionário, Π_{i_1} e Π_{i_2} $(i_1 \neq i_2)$ serão duas variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Neste caso, define-se :

$$\pi_k = P\left(\Pi_i = k\right) \qquad ; \quad k \geq 0 \qquad (18)$$

$$\delta_k = \frac{\pi_k}{\pi_0} \qquad (19)$$

$$\Delta^{*}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \delta_k \qquad (20)$$

A expressão de $\Delta^{*}(z)$ e o valor de π_0 serão dados por :

$$\Delta^{*}(z) = \frac{\left(1 - H^{*}(z)\right)N^{*}(z)}{N^{*}(z) - z} \qquad (21)$$

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{\overline{H}} \qquad (22)$$

O valor de δ_0 será igual a 1. Os valores de δ_k, para $k \geq 1$, poderão ser obtidos a partir dos coeficientes de $\Delta^*(z)$, ou poderão ser calculados a partir do sistema de equações que está descrito abaixo e que foi obtido com base em (21) :

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_0 h_1 n_0 + \pi_1 n_0 \\
\pi_1 &= \pi_0 h_1 n_1 + \pi_0 h_2 n_0 + \pi_1 n_1 + \pi_2 n_0 \\
\pi_2 &= \pi_0 h_1 n_2 + \pi_0 h_2 n_1 + \pi_0 h_3 n_0 + \pi_1 n_2 + \pi_2 n_1 + \pi_3 n_0 \\
&\bullet \\
&\bullet \\
&\bullet
\end{aligned} \qquad (23)$$

A primeira equação permite o cálculo de δ_1. Substituindo-se π_1 como função de π_0 na segunda equação, obtém-se o valor de δ_2. Utilizando-se o mesmo raciocínio, é possível chegar-se ao valor de δ_{k+1}, para $k \geq 1$, a partir do valor de δ_k. Dessa forma, os valores de π_k, para $k \geq 1$, serão dados por :

$$\pi_k = \delta_k \pi_0 \qquad (24)$$

Seja Y_n a variável aleatória que representa o número total de usuários que estão presentes ao sistema no n-ésimo segmento $(n \geq 1)$. Em regime estacionário, Y_{n_1} e Y_{n_2} ($i_1 \neq i_2$) serão duas variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Neste caso, define-se :

$$y_k = P(Y_n = k) \qquad ; \quad k \geq 0 \qquad (25)$$

$$\theta_k = \frac{y_k}{y_0} \qquad (26)$$

$$\Theta^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^k \theta_k \qquad (27)$$

A expressão de $\Theta^*(z)$ e o valor de y_0 serão dados por :

$$\Theta^*(z) = \frac{(1-z)N^*(z)}{N^*(z) - z} \qquad (28)$$

$$y_0 = 1 - \rho \qquad (29)$$

O valor de θ_0 é igual a 1. Os valores de θ_k, para $k \geq 1$ poderão ser obtidos a partir dos coeficientes de $\Theta^*(z)$, ou poderão ser calculados a partir do sistema de equações que está descrito abaixo e que foi obtido com base em (28) :

$$\begin{aligned}
y_0 &= y_0\, n_0 + y_1\, n_0 \\
y_1 &= y_0\, n_1 + y_1\, n_1 + y_2\, n_0 \\
y_2 &= y_0\, n_2 + y_1\, n_2 + y_2\, n_1 + y_3\, n_0 \\
&\;\;\vdots \\
y_i &= y_0\, n_i + \sum_{s=1}^{i+1} y_s\, n_{i-s+1} \qquad ; \quad (i = 0,1,2,\ldots)
\end{aligned} \qquad (30)$$

A primeira equação permite o cálculo de θ_1. Substituindo-se y_1 como função de y_0 na segunda equação, obtém-se o valor de θ_2. Utilizando-se o mesmo raciocínio, é possível chegar-se ao valor de θ_{k+1}, para $k \geq 1$, a partir do valor de θ_k. Dessa forma, os valores de y_k, para $k \geq 1$, serão dados por :

$$y_k = \theta_k y_0 \qquad (31)$$

2.2) Tempo Médio de Espera [2] :

Seja $B_{g,i}$ a variável aleatória que representa o número de segmentos em que i-ésimo grupo $(i \geq 1)$ que chega ao sistema permanece em serviço e seja $B_g^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{B_{g,i}}\right)$ a função característica desta variável. Para $i \geq 1$, a expressão de $B_g{}^*(z)$ poderá ser obtida a partir das seguintes equações :

$$B_g{}^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B^*(z) h_k \tag{32}$$

$$B_g{}^*(z) = H^*\left(B^*(z)\right) \tag{33}$$

Seja $N_{g,i}$ a variável aleatória que representa o número total de grupos que chegaram ao sistema nos segmentos que sucederam os de serviço do i-ésimo grupo que partiu e seja $N_g{}^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{N_{g,i}}\right)$ a função característica desta variável. Para $i \geq 1$, é possível chegar-se à expressão de $N_g^*(z)$ por intermédio de :

$$N_g^*(z) = B_g^*\left(1 - p + pz\right) \tag{34}$$

$$N_g^*(z) = H^*\left(B^*\left(1 - p + pz\right)\right) \tag{35}$$

Seja $\Pi_{g,i}$ a variável aleatória que representa o número total de grupos que estão presentes ao sistema quando o i-ésimo grupo parte e seja $\Pi_g^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{\Pi_{g,i}}\right)$ a função característica desta variável. A expressão de $\Pi_g^*(z)$, em regime estacionário, poderá ser obtida a partir das seguintes equações :

$$\Pi_{g,i+1} = \max\left(0\ ;\ \Pi_{g,i} - 1\right) + N_{g,i+1} \tag{36}$$

$$\Pi_g^*(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)N_g^*(z)}{N_g^*(z) - z} \tag{37}$$

Seja D_g a variável aleatória que representa o número de segmentos que cada grupo permanece no sistema e seja $D_g^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{D_g}\right)$ a função característica desta variável. Como o número de grupos que estarão presentes ao sistema quando um grupo partir corresponderá ao número de grupos que chegaram nos segmentos que sucederam os de permanência do grupo que partiu no sistema, é possível obter-se a expressão de $D_g^*(z)$ através dos seguintes resultados :

$$\Pi_g^*(z) = D_g^*\left(1 - p + pz\right) \tag{38}$$

$$D_g^*(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B_g^*(z)}{1 - p - z + pB_g^*(z)} \tag{39}$$

Seja W_g a variável aleatória que representa o número de segmentos que cada grupo espera até que o seu serviço seja iniciado e seja $W_g^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{W_g}\right)$ a função característica desta variável. Como B_g é estatísticamente independente de W_g, é possível chegar-se à expressão de $W_g^*(z)$ por intermédio de :

$$W_g^*(z) = \frac{D_g^*(z)}{B_g^*(z)} \tag{40}$$

$$W_g^*(z) = \frac{\left(1-\rho\right)\left(1-z\right)}{1 - p - z + pB_g^*(z)} \tag{41}$$

Seja $\overline{W_g} = \mathrm{E}\left(W_g\right)$ o primeiro momento da variável aleatória W_g. O valor de $\overline{W_g}$ será dado por :

$$\overline{W_g} = W_g^{*\,'}(1) \tag{42}$$

$$\overline{W_g} = \frac{\left(\overline{A^2} - \overline{A}\right)\left(\overline{B}\right)^2 + \overline{A}\left(\overline{B^2} - \overline{B}\right)}{2\left(1-\rho\right)} \tag{43}$$

Seja C_i a variável aleatória que representa o número de usuários de um grupo que serão servidos antes do *i*-ésimo usuário deste grupo e seja $C^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{C_i}\right)$ a função característica desta variável. Para $i \geq 1$, a expressão de $C^*(z)$ poderá ser obtida, com base na teoria da renovação, a partir das seguintes equações :

$$C^*(z) = \frac{1 - H^*(z)}{\overline{H}(1-z)} \tag{44}$$

$$C^*(z) = \frac{1 - A^*(z)}{\overline{A}(1-z)} \tag{45}$$

Seja W_i a variável aleatória que representa o número de segmentos que decorrem desde que um grupo começa a ser servido até que o serviço do *i*-ésimo usuário deste grupo tenha início e seja $W_i^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{W_i}\right)$ a função característica desta variável. Para $i \geq 1$, pode-se chegar à expressão de $W_i^*(z)$ por intermédio de :

$$W_i^*(z) = C^*\left(B^*(z)\right) \tag{46}$$

$$W_i^*(z) = \frac{1 - A^*\left(B^*(z)\right)}{\overline{A}\left(1 - B^*(z)\right)} \tag{47}$$

Seja $\overline{W_i} = \mathrm{E}\left(W_i\right)$ o primeiro momento da variável aleatória W_i. Para $i \geq 1$, o valor de $\overline{W_i}$ será dado por :

$$\overline{W_i} = W_i^{*\,'}(1) \tag{48}$$

$$\overline{W_i} = \frac{\left(\overline{A^2} - \overline{A}\right)\overline{B}}{2\,\overline{A}} \tag{49}$$

Seja W a variável aleatória que representa o número de segmentos que cada usuário que espera até que seja iniciado o seu serviço e seja $W^*(z) = \mathrm{E}\left(z^W\right)$ a função característica desta variável. Como a variável aleatória W_g é estatísticamente independente da variável aleatória W_i, a expressão de $W^*(z)$ será dada por :

$$W^*(z) = W_g^*(z) W_i^*(z) \tag{50}$$

Seja $\overline{W} = \mathrm{E}(W)$ o primeiro momento da variável aleatória W. O valor de $\overline{W}$ será dado por :

$$\overline{W} = W^{*\,'}(1) \tag{51}$$

$$\overline{W} = \overline{W_g} + \overline{W_i} \tag{52}$$

3) Chegadas em Grupo, Tempo entre Chegadas de Grupos Geometricamente Distribuído, Serviço Genérico, 1 Servidor, Capacidade Finita *K* do Sistema ($Geom^{[X]}$ / *G* / *1* / *K*) [1] :

Seja $\Pi_i(K)$ a variável aleatória que representa o número total de usuários que estão presentes ao sistema quando o i-ésimo usuário $(i \geq 1)$ que chegou parte. Em regime estacionário, $\Pi_{i_1}(K)$ e $\Pi_{i_2}(K)$ $(i_1 \neq i_2)$ serão duas variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Neste caso, define-se :

$$\pi_k(K) = P\left(\Pi_i(K) = k\right) \qquad ; \quad k \geq 0 \tag{53}$$

$$\delta_k(K) = \frac{\pi_0(K)}{\pi_k(K)} \tag{54}$$

Os valores de $\delta_k(K)$, para $k = 0,1,\ldots,K-1,$ serão dados por :

$$\delta_k(K) = \delta_k \tag{55}$$

com os valores de δ_k, para $k = 0,1,\ldots,K-1,$ sendo definidos por (22)

Baseado na hipótese descrita na seção 1 de que um sistema com capacidade finita possui substituição atrasada, tem-se que sempre haverá uma posição vazia no sistema em um segmento de partida. Consequentemente, pode-se chegar ao valor de $\delta_K(K)$ por intermédio de :

$$\delta_K(K) = 0 \tag{56}$$

O valor de $\pi_0(K)$ será dado por :

$$\sum_{k=0}^{K} \delta_k(K)\ \pi_0(K) = 1 \tag{57}$$

Os valores de $\pi_k(K)$, para $k = 0,1,\ldots,K$, serão dados por :

$$\pi_k(K) = \delta_k(K)\pi_0(K) \tag{58}$$

Seja $Y_n(K)$ a variável aleatória que representa o número total de usuários que estão presentes ao sistema no n-ésimo segmento. Em regime estacionário, $Y_{n_1}(K)$ e $Y_{n_2}(K)$ ($i_1 \neq i_2$) serão duas variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Neste caso, define-se :

$$y_k(K) = P\big(Y_n(K) = k\big) \qquad ; \quad k \geq 0 \tag{59}$$

$$\theta_k(K) = \frac{y_i(K)}{y_0(K)} \tag{60}$$

Os valores de $y_k(K)$, para $k = 0,1,\ldots,K-1$, serão dados por :

$$\theta_k(K) = \theta_k \tag{61}$$

$$y_0(K) = \frac{\pi_0(K)}{\pi_0(K) + \dfrac{\rho}{H}} \tag{62}$$

com os valores de θ_k ($k = 1,2,\ldots,K-1$) sendo definidos por (29)

O valor de $y_K(K)$ será dado por :

$$y_K(K) = 1 - \sum_{k=0}^{K-1} \theta_k \, y_k(K) \qquad (63)$$

4) Chegadas em Grupo, Tempo entre Chegadas Geometricamente Distribuído, Serviço Determinístico igual a Um Segmento, *L* Servidores, Capacidade Infinita ($Geom^{[X]}/D/L$) [3] :

Seja Y_n a variável aleatória que representa o número total de usuários que estão presentes ao sistema no *n*-ésimo segmento $(n \geq 1)$ e seja A_n a variável aleatória que representa o número total de usuários que chegam ao sistema no *n*-ésimo segmento. Tem-se, para $n \geq 1$, a seguinte relação :

$$Y_{n+1} = max(0 \; ; \; Y_n - L) \; + \; A_{n+1} \qquad (64)$$

Seja $Y^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{Y_n}\right)$ a função característica da variável aleatória Y_n e seja $A^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{A_n}\right)$ a função característica da variável aleatória A_n. Para $n \geq 1$, a expressão de $Y^*(z)$ poderá ser obtida, com base em (64), a partir da seguinte equação :

$$Y^*(z) = \left(L - \overline{A}\right) \frac{(z-1)A^*(z)}{z^L - A^*(z)} \prod_{k=1}^{L-1} \frac{z - z_k}{1 - z_k} \qquad (65)$$

com a expressão de $A^*(z)$ sendo dada por (10) , com o valor de $\overline{A}$ sendo dado por (11) e com z_k correspondendo aos zeros compelxos da equação $z^L - A^*(z) = 0$.

Seja Q_n a variável aleatória que representa o número total de usuários que estão esperando no *n*-ésimo segmento pelo início dos seus serviços e seja $Q^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{Q_n}\right)$ a função característica desta variável. Como A_{n+1} é estatísticamente independente de Q_n, pode-se chegar à expressão de $Q^*(z)$, para $n \geq 1$, por intermédio de :

$$A_{n+1} + Q_n = Y_{n+1} \tag{66}$$

$$Q^*(z) = \frac{Y^*(z)}{A^*(z)} = \left(L - \overline{A}\right) \frac{(z-1)}{z^L - A^*(z)} \prod_{k=1}^{L-1} \frac{z - z_k}{1 - z_k} \tag{67}$$

Seja C_i a variável aleatória que representa o número de usuários de um grupo que serão servidos antes do *i*-ésimo usuário deste grupo. Seja $C^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{C_i}\right)$ a função característica desta variável. Com base na teoria da renovação, pode-se obter a expressão de $C^*(z)$, para $i \geq 1$, a partir da seguinte equação :

$$C^*(z) = \frac{1 - A^*(z)}{\overline{A}\,(1 - z)} \tag{68}$$

Seja R_n a variável aleatória que representa o número total de usuários que estão presentes ao sistema no *n*-ésimo segmento e que serão transmitidos antes do *i*-ésimo usuário do grupo que chegou ao sistema no *n*-ésimo segmento e seja $R^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{R_n}\right)$ a função característica desta variável. É possível obter-se a expressão de $R^*(z)$, para $i \geq 1$ e para $n \geq 1$, através dos seguintes resultados :

$$R_n = C_i + Q_n \tag{69}$$

$$R^*(z) = C^*(z) Q^*(z) \tag{70}$$

$$R^*(z) = \frac{L - \overline{A}}{\overline{A}} \frac{A^*(z) - 1}{z^L - A^*(z)} \prod_{k=1}^{L-1} \frac{z - z_k}{1 - z_k} \tag{71}$$

Seja D a variável aleatória que representa o número de segmentos que cada usuário permanece no sistema e seja $D^*(z) = \mathrm{E}\left(z^D\right)$ a função característica desta variável. Seja $d_k = P(D = k)$ a probabilidade de que a variável aleatória *D* assuma o valor k $(k \geq 1)$ e seja $r_k = P\left(R_n = k\right)$ a probabilidade de que a variável aleatória R_n assuma o valor k $(k \geq 0)$. Pode-se chegar à expressão de $D^*(z)$ por intermédio de :

$$d_k = \sum_{i=0}^{L-1} r_{(k-1)L+i} \qquad ; \; k \geq 1 \qquad (72)$$

$$D^*\left(z^L\right) = \frac{L-\overline{A}}{L\overline{A}} \sum_{s=0}^{L-1} \frac{z^L - 1}{1-\left(\xi^s z\right)^{-1}} R^*\left(\xi^s z\right) \qquad (73)$$

com $\xi = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\right)$.

Seja $\overline{D} = \mathrm{E}(D)$ o primeiro momento da variável aleatória D. O valor de $\overline{D}$ será dado por :

$$\overline{D} = D^{*\,'}(1) \qquad (74)$$

$$\overline{D} = \frac{1}{\overline{A}}\left[\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{L-1} \frac{1+z_k}{1-z_k} + \overline{A} + \frac{\left(\overline{A^2}-\overline{A}\right)-(L-1)\overline{A}}{2\left(L-\overline{A}\right)}\right] \qquad (75)$$

Seja W a variável aleatória que representa o número de segmentos que cada usuário espera pelo início do seu serviço. Seja $w_k = P(W = k)$ a probabilidade de que a variável aleatória W assuma o valor k $(k \geq 0)$ e seja $W^*(z) = \mathrm{E}\left(z^W\right)$ a função característica desta variável. A expressão de $W^*(z)$ poderá ser obtida a partir das seguintes equações:

$$w_k = d_{k+1} \qquad ; \; k \geq 0 \qquad (76)$$

$$W^*\left(z^L\right) = \frac{D^*\left(z^L\right)}{z^L} \qquad (77)$$

Seja $\overline{W} = \mathrm{E}(W)$ o primeiro momento da variável aleatória W. O valor de $\overline{W}$ será dado por :

$$\overline{W} = W^{*\,'}(1) \qquad (78)$$

$$\overline{W} = \overline{D} - 1 \qquad (79)$$

5) Chegadas em Grupo, Tempo entre Chegadas Geometricamente Distribuído, Serviço Genérico, 1 Servidor, Capacidade Infinita, *M* classes de Prioridade [4] :

Seja $A_{m,n}$ a variável aleatória que representa o número de usuários da m-ésima classe de prioridade $(m = 1,2,\ldots,M)$ que chegam ao sistema no n-ésimo segmento $(n \geq 1)$. Supõe-se que, para $m = 1,2,\ldots,M$ e para $n \geq 1$, $A_{m,n}$ seja uma variável aleatória *iid*. Para $m = 1,2,\ldots,M$ e para $n \geq 1$, define-se :

$$a_{m,k} = P\left(A_{m,n} = k\right) \qquad ; \; k \geq 0 \qquad (80)$$

Seja $A_m^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{A_{m,n}}\right)$ a função característica da variável aleatória $A_{m,n}$ e sejam $\overline{A_m} = \mathrm{E}\left(A_{m,n}\right)$ e $\overline{A_m^2} = \mathrm{E}\left(A_{m,n}^2\right)$ os seus dois primeiros momentos. Para $m = 1,2,\ldots,M$ e para $n \geq 1$, a expressão de $A_m^*(z)$ e os valores de $\overline{A_m}$ e de $\overline{A_m^2}$ serão dados, respectivamente, por :

$$A_m^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_{m,k} \qquad (81)$$

$$\overline{A_m} = A_m^{*\,'}(1) \qquad (82)$$

$$\overline{A_m^2} = A_m^{*\,''}(1) + A_m^{*\,'}(1) \qquad (83)$$

Seja $A_{C_m,n}$ a variável aleatória que representa o número de usuários da superclasse de prioridade m (classes a cujos usuários é atribuída uma prioridade maior ou igual à prioridade dos usuários da classe m) que chegam ao sistema no n-ésimo segmento. Para $m = 1,2,\ldots,M$ e para $n \geq 1$, é possível obter a seguinte relação:

$$A_{C_m,n} = \sum_{k=1}^{m} A_{m,n} \qquad (84)$$

Seja $A^*_{C_m}(z) = \mathrm{E}\left(z^{A_{C_{m,n}}}\right)$ a função característica da variável aleatória $A_{C_{m,n}}$. Como, para $n \geq 1$, $A_{m_1,n}$ é estatísticamente independente de $A_{m_2,n}$, quando $m_1 < m_2$, pode-se chegar, com base em (84), à expressão de $A^*_{C_m}(z)$, para $m = 1,2,\ldots,M$ e para $n \geq 1$, por intermédio de :

$$A^*_{C_m}(z) = \prod_{k=1}^{m} A^*_k(z) \tag{85}$$

Sejam $\overline{A_{C_m}} = \mathrm{E}\left(A_{C_{m,n}}\right)$ e $\overline{A^2_{C_m}} = \mathrm{E}\left(A^2_{C_{m,n}}\right)$ os dois primeiros momento da variável aleatória $A_{C_{m,n}}$. Para $m = 1,2,\ldots,M$ e para $n \geq 1$, os valores de $\overline{A_{C_m}}$ e de $\overline{A^2_{C_m}}$ serão dados, respectivamente, por :

$$\overline{A_{C_m}} = A^{*'}_{C_m}(1) \tag{86}$$

$$\overline{A^2_{C_m}} = A^{*''}_{C_m}(1) + A^{*'}_{C_m}(1) \tag{87}$$

Seja $B_{i,m}$ a variável aleatória que representa o tamanho da i-ésima mensagem $(i \geq 1)$ da classe de prioridade m que chegou ao sistema. Supõe-se que, para $m = 1,2,\ldots,M$ e para $i \geq 1$, $B_{i,m}$ seja uma variável aleatória. Para $m = 1,2,\ldots,M$ e para $i \geq 1$, define-se :

$$b_{m,k} = P\left(B_{i,m} = k\right) \qquad ; \quad k \geq 1 \tag{88}$$

Seja $B^*_m(z) = \mathrm{E}\left(z^{B_{i,m}}\right)$ a função característica da variável aleatória $B_{i,m}$. Para $m = 1,2,\ldots,M$ e para $i \geq 1$, a expressão de $B^*_m(z)$ será dada por :

$$B^*_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k b_{m,k} \tag{89}$$

Seja B_{C_m}, para $m = 1, 2, \ldots, M$, a variável aleatória cuja função característica é definida de acordo com a expressão abaixo :

$$B^*_{C_m}(z) = \frac{\sum_{k=1}^{m} \overline{A_k} B^*_k(z)}{\sum_{k=1}^{m} \overline{A_k}} \qquad (90)$$

Sejam $\overline{B_{C_m}} = \mathrm{E}\left(B_{C_m}\right)$ e $\overline{B^2_{C_m}} = \mathrm{E}\left(B^2_{C_m}\right)$ os dois primeiros momentos da variável aleatória B_{C_m}. Para $m = 1, 2, \ldots, M$, os valores de $\overline{B_{C_m}}$ e de $\overline{B^2_{C_m}}$ serão dados, respectivamente, por :

$$\overline{B_{C_m}} = B^{*\,'}_{C_m}(1) \qquad (91)$$

$$\overline{B^2_{C_m}} = B^{*\,''}_{C_m}(1) + B^{*\,'}_{C_m}(1) \qquad (92)$$

Seja W_m a variável aleatória que representa o número de segmentos que uma célula da *m*-ésima classe de prioridade espera, em regime estacionário, para ter o seu serviço iniciado e seja $W^*_m(z) = \mathrm{E}\left(z^{W_m}\right)$ a função característica desta variável.

Como a presença das células das classes de prioridade m $(m > 1)$ não afetam o comportamento estatístico das células das classes de prioridade 1, pode-se obter, com base nos resultados que são apresentados na seção 2.2 deste trabalho, a expressão de $W^*_1(z)$, a partir das seguintes equações :

$$\rho_1 = \overline{A_1}\,\overline{B_1} \qquad (93)$$

$$W^*_1(z) = \frac{\left(1-\rho_1\right)(z-1)}{z - A^*_1\left(B^*_1(z)\right)} \; \frac{1 - A^*_1(z)}{\overline{A_1}\left(1 - B^*_1(z)\right)} \qquad (94)$$

Seja $\overline{W_1} = \mathrm{E}\left(W_1\right)$ o primeiro momento da variável aleatória W_1. Pode-se chegar ao valor de $\overline{W_1}$, por intermédio de :

$$\overline{W_m} = W_m^{*\,'}(1) \qquad (95)$$

$$\overline{W_1} = \frac{\left(\overline{A_1^2} - \overline{A_1}\right)\left(\overline{B_1}\right)^2 + \overline{A_1}\left(\overline{B_1^2} - \overline{B_1}\right)}{2(1-\rho_1)} + \frac{\left(\overline{A_1^2} - \overline{A_1}\right)\overline{B_1}}{2\ \overline{A_1}} \qquad (96)$$

Seja η_{m_1} a variável aleatória que representa a quantidade de serviço incompleto decorrente dos usuários da superclasse de prioridade *m* que cada usuário encontra no sistema ao chegar e seja $\eta^*_{m_1}(z) = \mathrm{E}\left(z^{\eta_{m_1}}\right)$ a função característica desta variável. A expressão de $\eta^*_{m_1}(z)$, para $m = 2, 3, \ldots, M$, poderá ser obtida a partir das seguintes equações :

$$\rho_m = \overline{A_m}\,\overline{B_m} \qquad (97)$$

$$\eta^*_{m_1}(z) = \left(1 - \sum_{k=1}^{m} \rho_k\right)(z-1)\left[z - \prod_{k=1}^{m} A_k^*\left(B_k^*(z)\right)\right]^{-1} \qquad (98)$$

Seja η_{m_2} a variável aleatória que representa a quantidade de serviço incompleto decorrente dos usuários da superclasse de prioridade *m* que estão presentes a um grupo e que são servidos antes do *i*-ésimo usuário da classe de prioridade *m* deste grupo e seja $\eta^*_{m_2}(z) = \mathrm{E}\left(z^{\eta_{m_2}}\right)$ a função característica desta variável. A expressão de $\eta^*_{m_2}(z)$, para $m = 2, 3, \ldots, M$ e para $i \geq 1$, será dada por :

$$\eta^*_{m_2}(z) = \prod_{k=1}^{m-1} A_k^*\left(B_k^*(z)\right)\ \frac{1 - A_m^*\left(B_m^*(z)\right)}{\overline{A_m}\left[1 - B_m^*(z)\right]} \qquad (99)$$

Seja $\eta_m = \eta_{m_1} + \eta_{m_2}$ e seja $\eta_m^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{\eta_m}\right)$ a função característica da variável aleatória η_m. Como a variável aleatória η_{m_1} é estatísticamente independente da variável aleatória η_{m_2}, é possível obter-se a expressão de $\eta_m^*(z)$, para $m = 2, 3, \ldots, M$, com base no seguinte resultado :

$$\eta_m^*(z) = \eta_{m_1}^*(z)\ \eta_{m_2}^*(z) \tag{100}$$

Seja $G_{C_{m-1}}$ a variável aleatória que representa o período de ocupação do sistema quando existe uma carga inicial no sistema dada por η_m e quando só ocorre a chegada de células da superclasse de prioridade $m-1$ e seja $G_{C_{m-1}}^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{G_{C_{m-1}}}\right)$ a função característica desta variável. Tem-se, para $m = 2, 3, \ldots, M$, a seguinte relação :

$$G_{C_{m-1}}^*(z) = B_{C_{m-1}}^*\left(zA_{C_{m-1}}^*\left(G_{C_{m-1}}^*(z)\right)\right) \tag{101}$$

Como o comportamento estatístico dos usuários das classes de prioridade m_1 não é afetado pelo comportamento estatístico dos usuários das classes de prioridade m_2, quando $m_1 < m_2$, tem-se que a expressão de $W_m^*(z)$, para $m = 2, 3, \ldots, M$, será dada por :

$$W_m^*(z) = \eta_m^*\left[zA_{C_{m-1}}^*\left(G_{C_{m-1}}^*(z)\right)\right] \tag{102}$$

Seja $\overline{W_m} = \mathrm{E}\left(W_m\right)$ o primeiro momento da variável aleatória W_m. Pode-se chegar ao valor de $\overline{W_m}$, para $m = 2, 3, \ldots, M$, por intermédio de :

$$\overline{W_m} = W_m^{*\,'}(1) \tag{103}$$

$$\overline{W_m} = \left(1 - \rho_{C_{m-1}}\right)^{-1}\left\{\frac{\overline{\tilde{A}_{C_m}^2} - \overline{\tilde{A}_{C_m}}}{2(1-\rho_{C_m})} + \sum_{i=1}^{m-1}\overline{A_i}\,\overline{B_i} + \frac{\overline{B_m}\left(\overline{A_m^2} - \overline{A_m}\right)}{2\overline{A_m}}\right\} \tag{104}$$

com os valores de ρ_{C_m}, $\overline{\tilde{A}_{C_m}}$ e $\overline{\tilde{A}^2_{C_m}}$, para $m = 2, 3, \ldots, M$, sendo dados, respectivamente, por:

$$\rho_{C_m} = \overline{\tilde{A}_{C_m}} = \overline{A_{C_m}}\,\overline{B_{C_m}} \tag{105}$$

$$\overline{\tilde{A}^2_{C_m}} = \left(\overline{A^2_{C_m}} - \overline{A_{C_m}}\right)\left(\overline{B_{C_m}}\right)^2 + \overline{A_{C_m}}\,\overline{B^2_{C_m}} \tag{106}$$

6) Bibliografia :

[1] - M.S.Schmookler, "Limited Capacity Discrete Time Queues with Single or Bulk Arrival", TR 00.2048, IBM, 1970.

[2] - Notas de Aula, Curso de Análise de Desempenho, COE, 1995.

[3] - H.Bruneel, B.G.Kim, "Discrete-Time Models for Communication Systems Including ATM" , Kluwer Academic Publishers, 1993.

[4] - I.Rubin, Z.H.Tsai, "Message Delay Analysis of Multiclass Priority TDMA, FDMA, and Discrete-Time Queueing Systems", IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-35, No. 3, pp. 637 - 647, May 1989.