COPPE/UFRJ

Laboratório de Redes de Alta Velocidade -- RAVEL

Avaliação de Desempenho de Comutadores ATM

Luís Felipe Magalhães de Moraes -- Coordenador

Guilherme de Melo Batista Domingues

Relatório Técnico Ravel/05-97

18/04/97

1) Filas Somente nas Entradas [1]:

Seja $A_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número total de células que estão destinadas para a *j*-ésima saída $\left(j = 1,2,\ldots,N\right)$ e que chegam à cabeça das filas de entrada no *n*-ésimo segmento $\left(n \geq 1\right)$.

Sob a hipótese de que o tráfego de entrada esteja uniformemente distribuído pelas saídas e sob a hipótese de que o número de células que chegam em cada porta de entrada, a cada segmento, seja uma variável aleatória de Bernoulli com taxa *p*, pode-se mostrar, quando $N \to \infty$, que a variável aleatória $A_{j,n}$ é uma variável aleatória de Poisson com taxa *p*. Define-se, para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$:

$$a_k = P\left(A_{j,n} = k\right) \qquad ; k \geq 0 \qquad (1)$$

Quando $N \to \infty$, os valores de a_k, para $k \geq 0$, serão dados por :

$$a_k = \frac{\exp(-p)p^k}{k!} \qquad (2)$$

Seja $R_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número total de células que estão destinadas para a *j*-ésima saída e que permanecem bloqueadas na cabeça das filas de entrada, no *n*-ésimo segmento. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, tem-se a seguinte relação:

$$R_{j,n+1} = \max\left(0 \; ; \; R_{j,n} + A_{j,n+1} - 1\right) \qquad (3)$$

Seja $\overline{R} = \mathrm{E}\left(R_{j,n}\right)$ o primeiro momento da variável aleatória $R_{j,n}$, em regime estacionário. Baseando-se na equação (3), pode-se concluir, quando $N \to \infty$, que o valor de $\overline{R}$, para $j = 1,2,\ldots,N$, será dado pelo número médio de usuários que esperam, em regime estacionário, em um sistema M / D / 1 discreto com intervalo médio entre chegadas *p* e com serviço determinístico igual a um segmento :

$$\overline{R} = \frac{p^2}{2(1-p)} \qquad (4)$$

Seja F_n a variável aleatória que representa o número total de células que são transferidas para as portas de saída no *n*-ésimo segmento e seja $\overline{F} = \mathrm{E}(F_n)$ o primeiro momento da variável aleatória F_n , em regime estacionário. Sabendo-se que, sob carga de saturação, existirá sempre uma célula em cada fila de entrada, pode-se obter o valor de $\overline{F}$, à partir das seguintes equações :

$$F_n = N - \sum_{j=1}^{N} R_{j,n} \qquad ; \; n \geq 1 \qquad (5)$$

$$\overline{F} = N - N\overline{R} \qquad (6)$$

Como se supõe que não ocorrem perdas no interior do comutador, a vazão normalizada por porta de saída, em regime estacionário, também será dada por *p*. Dessa forma, pode-se obter a seguinte igualdade :

$$p = \frac{\overline{F}}{N} \qquad (7)$$

Aplicando-se na equação (7) o valor de $\overline{F}$ que foi obtido em (6), chega-se ao seguinte valor para $\overline{R}$:

$$\overline{R} = 1 - p \qquad (8)$$

Igualando-se os valores de $\overline{R}$ que foram obtidos nas equações (4) e (8) , é possível obter o valor de p que provoca a saturação do comutador :

$$1 - p = \frac{p^2}{2(1 - p)} \qquad (9)$$

$$p = 2 - \sqrt{2} = 0.586 \; (58{,}6\%). \qquad (10)$$

Pode-se concluir que, na existência de filas com capacidade infinita somente nas entradas, o comutador possuirá uma vazão normalizada de saturação por porta de saída igual a 58,6 % quando $N \to \infty$ e quando o tráfego de entrada for independente e uniformemente distribuído. Tal fato é consequência direta do efeito de *HOL Blocking* existente neste tipo de arquitetura.

2) Filas Somente nas Saídas, *Speedup N* [2] :

Seja $A_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número total de células que estão destinadas para a *j*-ésima saída $(j = 1,2,\ldots,N)$ e que chegam à cabeça das filas de entrada no *n*-ésimo segmento $(n \geq 1)$.

Supondo-se que o tráfego de entrada esteja uniformemente distribuído pelas saídas e que o número de células que chegam em cada porta de entrada, a cada segmento, seja uma variável aleatória de Bernoulli com taxa *p*, pode-se mostrar, quando $N \to \infty$, que $A_{j,n}$ é uma variável aleatória Binomial com taxa *p*. Define-se, para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$:

$$a_k = P\left(A_{j,n} = k\right) \qquad ; k \geq 0 \qquad (11)$$

Os valores de a_k , para $k \geq 0$, serão dados por :

$$a_k = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{N}\right)^k\left(1-\frac{p}{N}\right)^{N-k} \qquad (12)$$

Seja $A^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{A_{j,n}}\right)$ a função característica da variável aleatória $A_{j,n}$. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, a expressão de $A^*(z)$ poderá ser obtida por intermédio das seguintes equações :

$$A^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k \qquad (13)$$

$$A^*(z) = \left(1 + \frac{p}{N} + z\,\frac{p}{N}\right)^N \qquad (14)$$

2.1) Capacidade Infinita :

Seja $Q_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número de células que estão esperando pelo início do serviço na *j*-ésima fila saída $(j = 1,2,\ldots,N)$, no *n*-ésimo segmento $(n \geq 1)$. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, tem-se a seguinte relação:

$$Q_{j,n+1} = \max\left(0\ ;\ Q_{j,n} + A_{j,n+1} - 1\right) \qquad (15)$$

Seja $Q^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{Q_{j,n}}\right)$ a função característica da variável aleatória $Q_{j,n}$. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, pode-se obter a expressão de $Q^*(z)$ à partir da equação (15) :

$$Q^*(z) = \frac{(1-p)(1-z)}{A^*(z) - z} \qquad (16)$$

Seja $\overline{Q} = \mathrm{E}\left(Q_{j,n}\right)$ o primeiro momento da variável aleatória $Q_{j,n}$. Para $j = 1,2,\ldots,N$, o valor de $\overline{Q}$ poderá ser obtido, em regime estacionário, através das seguintes equações:

$$\overline{Q} = Q^{*\,'}(1) \qquad (17)$$

$$\overline{Q} = \frac{(N-1)}{N}\,\frac{p^2}{2(1-p)} = \frac{(N-1)}{N}\,\overline{Q}_{M/D/1} \qquad (18)$$

Quando $N \to \infty$, $\overline{Q}$ corresponderá ao número médio de usuários que esperam, em regime estacionário, pelo início dos seus serviços, em um sistema M / D / 1 discreto com intervalo médio entre chegadas p e com serviço determinístico igual a um segmento. Neste caso, o valor de $\overline{Q}$ será dado por :

$$\overline{Q} = \frac{p^2}{2(1-p)} \qquad (19)$$

Seja $\overline{W}$ o primeiro momento da variável aleatória que representa o número de segmentos que decorrem desde que uma célula chega ao comutador até o instante em que ela começa a ser transmitida. Através do teorema de Little, tem-se que :

$$\overline{W} = \frac{(N-1)}{N}\frac{p}{2(1-p)} = \frac{(N-1)}{N}\overline{W}_{M/D/1} \qquad (20)$$

Quando $N \to \infty$, $\overline{W}$ corresponderá ao número médio de segmentos que um usuário espera, em regime estacionário, pelo início do seu serviço, em um sistema M / D / 1 discreto com intervalo médio entre chegadas p e com serviço determinístico igual a um segmento. Neste caso, o valor de $\overline{W}$ será dado por :

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{p} = \frac{p}{2(1-p)} \qquad (21)$$

Como não ocorrem perdas no interior do comutador, *p* também corresponderá à vazão normalizada por porta de saída, em regime estacionário. O sistema não saturará para uma vazão normalizada por porta de saída *p*, tal que o denominador da equação (20) seja maior que zero. Para que o comutador sature, torna-se necessário que:

$$2(1-p) = 0 \qquad (22)$$

$$p = 1 \;\; (100\%) \qquad (23)$$

Pode-se concluir que, na existência de filas com capacidade infinita somente nas saídas, o comutador possuirá uma vazão normalizada de saturação por porta de saída próxima a 100 % quando o tráfego de entrada for independente e uniformemente distribuído.

Consequentemente, quando $N \to \infty$, o desempenho obtido em um sistema com filas de capacidade infinita somente nas saídas, em termos de vazão máxima por porta de saída, será bem superior ao que foi obtido quando existem filas de capacidade infinita somente nas portas de entrada, uma vez que foi eliminado o efeito do *HOL Blocking*.

Entretanto, quando existem filas de capacidade infinita somente nas saídas, poderá ocorrer o bloqueio de células nas portas de entrada se o fator de *Speedup* for menor que *N*. Em compensação, em um sistema com filas de capacidade infinita somente nas entradas, não ocorrerá o bloqueio de células, apesar do fator de *Speedup* ser igual a 1.

2.2) Capacidade Finita :

Seja $Q_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número de células que estão esperando pelo início de suas transmissões, na *j*-ésima fila saída $\left(j = 1,2,\ldots,N\right)$, no *n*-ésimo segmento $(n \geq 1)$. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, tem-se a seguinte relação:

$$Q_{j,n+1} = \min\left\{\max\left[0\ ;\ Q_{j,n} + A_{j,n+1} - 1\right];\ K\right\} \qquad (24)$$

Como $\left\{A_{j,n}\ ;\ j = 1,2,\ldots,N\ ;\ n \geq 1\right\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias Binomiais com taxa p, pode-se concluir, baseando-se na equação (24), que o número de células que esperam pelo início de suas transmissões, na *j*-ésima fila, forma uma cadeia de Markov.

Seja $P_{s,t} = P\left(Q_{j,n} = s\ /\ Q_{j,n-1} = t\right)$ a probabilidade de transição, em regime estacionário, do estado s $\left(s = 1,2,\ldots,K\right)$ da cadeia para o estado t $\left(t = 1,2,\ldots,K\right)$. Pode-se obter o seguinte sistema de equações de transição de estado :

$$P_{s,t} = a_0 + a_1 \quad ; \left(s = 0 \; ; \; t = 0\right) \tag{25}$$

$$P_{s,t} = a_0 \quad ; \left(1 \le s \le K \; ; \; t = s - 1\right) \tag{26}$$

$$P_{s,t} = a_{t-s+1} \quad ; \left(1 \le t \le K - 1 \; ; \; 0 \le s \le t\right) \tag{27}$$

$$P_{s,t} = \sum_{m=t-s+1}^{N} a_m \quad ; \left(t = K \; ; \; 0 \le s \le t\right) \tag{28}$$

$$P_{s,t} = 0 \quad ; \text{em qualquer outro caso} \tag{29}$$

com os valores de $a_k \ (k \ge 0)$ sendo dados por (12).

Seja $q_k = P\left(Q_{j,n} = k\right)$, a probabilidade de haver $k \ (k = 0,1,\ldots,K)$ células esperando pelo início de suas transmissões na j-ésima saída, no n-ésimo segmento. À partir dos valores obtidos para $P_{s,t}$, será possível chegar aos valores de q_k, em regime estacionário, para $j = 1,2,\ldots,N$, por intermédio das seguintes equações :

$$q_1 = \frac{q_0\left(1 - a_0 - a_1\right)}{a_0} \tag{30}$$

$$q_k = \frac{q_{k-1}\left(1 - a_1\right)}{a_0} - \sum_{i=2}^{k}\left(\frac{a_i}{a_0} q_{k-i}\right) \quad ; 2 \le k \le K \tag{31}$$

$$q_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{K}\left(\frac{q_i}{q_0}\right)} \tag{32}$$

Uma saída qualquer não transmitirá células no n-ésimo segmento se não houver qualquer célula esperando para receber serviço nesta saída no segmento (n-1) e se não chegar qualquer célula a esta saída no n-ésimo segmento. Desta forma, a vazão normalizada média ρ_0 por porta de saída, em regime estacionário, será dada por :

$$\rho_0 = 1 - q_0 a_0 \tag{33}$$

Seja P_B a probabilidade de que ocorra, em regime estacionário, o bloqueio de uma célula nas saídas. O valor de P_B poderá ser obtido por intermédio da seguinte equação :

$$P_B = 1 - \frac{\rho_0}{p} \tag{34}$$

Seja $\overline{W}$ o primeiro momento da variável aleatória que representa o número de segmentos que decorrem desde que uma célula chega ao comutador até o instante em que ela começa a ser transmitida. Baseado no teorema de Little, tem-se que :

$$\overline{W} = \frac{\sum_{k=0}^{K} q_k}{p(1 - P_B)} \tag{35}$$

À partir do valor de ρ_0, pode-se obter o valor de P_B como função da carga média de entrada p, do tamanho das filas K e do número de portas N. Consequentemente, será possível dimensionar os valores de K e de N a fim de que o valor de p não extrapole um limite à partir do qual a probabilidade de bloqueio P_B se torna maior do que o que é desejado.

Como exemplo, podemos citar uma probabilidade de bloqueio igual a 10^{-6} para uma carga média normalizada por porta de entrada p = 0,8, quando K = 28 e $N \to \infty$. Cabe ressaltar que, quando $K \to \infty$, os mesmos resultados com relação a $\overline{W}$ podem ser obtidos na seção 3.1 deste trabalho.

3) Filas Somente nas Saídas, Speedup *L* [3] :

Seja $A_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número total de células que estão destinadas para a *j*-ésima saída $\left(j = 1,2,\ldots,N\right)$ e que chegam à cabeça das filas de entrada no *n*-ésimo segmento $(n \geq 1)$.

Supondo-se que o tráfego de entrada esteja uniformemente distribuído pelas saídas e que o número de células que chegam em cada porta de entrada, a cada segmento, seja uma variável aleatória de Bernoulli com taxa *p*, pode-se mostrar, quando $N \to \infty$, que $A_{j,n}$ é uma variável aleatória Binomial com taxa *p*. Define-se, para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$:

$$a_k = P\left(A_{j,n} = k\right) \qquad ; k \geq 0 \qquad (36)$$

Os valores de a_k , para $k \geq 0$, serão dados por :

$$a_k = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{N}\right)^k \left(1 - \frac{p}{N}\right)^{N-k} \qquad (37)$$

Seja $A^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{A_{j,n}}\right)$ a função característica da variável aleatória $A_{j,n}$. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, a expressão de $A^*(z)$ poderá ser obtida por intermédio das seguintes equações :

$$A^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k \qquad (38)$$

$$A^*(z) = \left(1 + \frac{p}{N} + z\,\frac{p}{N}\right)^N \qquad (39)$$

Seja $V_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número de células que são transferidas das portas de entrada para a *j*-ésima saída, no *n*-ésimo segmento. Como $\left\{A_{j,n}\ ;\ j=1,2,\ldots,N\ ;\ n\geq 1\right\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias Binomiais com taxa p , tem-se que $\left\{V_{j,n}\ ;\ j=1,2,\ldots,N\ ;\ n\geq 1\right\}$ também será um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Define-se, para $j=1,2,\ldots,N$ e para $n\geq 1$:

$$v_k = P\left(V_{j,n} = k\right) \qquad ;\ k = 0,1,\ldots,L \tag{40}$$

Tem-se que os valores de v_k serão dados por :

$$v_k = a_k \qquad ;\ k = 0,1,\ldots,L-1 \tag{41}$$

$$v_k = \sum_{m=L}^{\infty} a_m \qquad ;\ k = L \tag{42}$$

Seja $V^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{V_{j,n}}\right)$ a função característica da variável aleatória $V_{j,n}$. Baseado nos valores obtidos para v_k $(k=0,1,\ldots,L)$, pode-se obter, para $j=1,2,\ldots,N$ e para $n\geq 1$, a expressão de $V^*(z)$ por intermédio das seguintes equações:

$$V^*(z) = \sum_{k=0}^{L} z^k v_k \tag{43}$$

$$V^*(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^k a_k + \sum_{k=L}^{\infty} z^L a_k \tag{44}$$

$$V^*(z) = \sum_{k=0}^{L} \left(z^k - z^L\right) a_k + z^L \tag{45}$$

Sejam $\overline{V} = \mathrm{E}\left(V_{j,n}\right)$ e $\overline{V^2} = \mathrm{E}\left(V_{j,n}^2\right)$ os dois primeiros momentos da variável aleatória $V_{j,n}$. Os valores de $\overline{V}$ e de $\overline{V^2}$, para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, serão dados por :

$$\overline{V} = V^{*\,'}(1) \qquad (46)$$

$$\overline{V^2} = V^{*\,''}(1) \; + \; V^{*\,'}(1) \qquad (47)$$

3.1) Capacidade Infinita :

Seja $\Phi_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número de células que são destinadas para a j-ésima saída $\left(j = 1,2,\ldots,N\right)$ e que são descartadas nas portas de entrada, no n-ésimo segmento $(n \geq 1)$. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, tem-se a seguinte relação :

$$\Phi_{j,n} = A_{j,n} - V_{j,n} \qquad (48)$$

Seja $\overline{\Phi} = \mathrm{E}\left(\Phi_{j,n}\right)$ o primeiro momento da variável aleatória $\Phi_{j,n}$. Para $j = 1,2,\ldots,N$, o valor de $\overline{\Phi}$, em regime estacionário, poderá ser obtido por intermédio da seguinte equação :

$$\overline{\Phi} = \sum_{k=L+1}^{N} (k - L) a_k \qquad (49)$$

Seja P_{Bin} a probabilidade de que ocorra, em regime estacionário, o bloqueio de uma célula nas portas de entrada. O valor de P_{Bin} corresponderá à porcentagem média das células que chegam ao comutador e que são descartadas nas portas de entrada. Tem-se que :

$$P_{B_{in}} = \frac{\overline{\Phi}}{p} \qquad (50)$$

$$P_{B_{in}} \quad = \quad \left[\frac{1}{p} \sum_{k=L+1}^{N} (k-L) a_k \right] \qquad (51)$$

Seja $Q_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número de células que estão esperando pelo início de suas transmissões, na *j*-ésima fila saída, no *n*-ésimo segmento. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, tem-se a seguinte relação:

$$Q_{j,n} = \max\left(0 \; ; \; Q_{j,n-1} + V_{j,n} - 1\right) \qquad (52)$$

com o valor de $V_{j,n}$ sendo dado por :

$$V_{j,n} = \min\left(L \; ; \; A_{j,n}\right) \qquad (53)$$

Seja $Q^{*}(z) = \mathrm{E}\left(z^{Q_{j,n}}\right)$ a função característica da variável aleatória $Q_{j,n}$. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, pode-se obter a expressão de $Q^{*}(z)$ à partir das equações (52) e (53) :

$$Q^{*}(z) = \frac{\left(1 - p\left(1 - P_{Bin}\right)\right)(z-1)}{z - V^{*}(z)} \qquad (54)$$

Seja $\overline{Q} = \mathrm{E}\left(Q_{j,n}\right)$ o primeiro momento da variável aleatória $Q_{j,n}$. Para $j = 1,2,\ldots,N$, o valor de $\overline{Q}$ poderá ser obtido, em regime estacionário, através das seguintes equações:

$$\overline{Q} = Q^{*\,'}(1) \qquad (55)$$

$$\overline{Q} = \frac{\left(1 - p\left(1 - P_B\right)\right)\left(\overline{V^2} - \overline{V}\right)}{2\left(\overline{V} - 1\right)^2} \qquad (56)$$

Seja $\overline{W_1}$ o primeiro momento da variável aleatória que representa o número médio de segmentos que um grupo espera na *j*-ésima saída, em regime estacionário, até que a sua transmissão tenha início. Como o tempo de serviço de cada usuário é determinístico e igual a um segmento, o valor de $\overline{W_1}$ poderá ser obtido, para $j = 1,2,\ldots,N$, por intermédio da seguinte equação :

$$\overline{W_1} = \overline{Q} \qquad (57)$$

Seja $\overline{W_2}$ o primeiro momento da variável aleatória que representa o número de segmentos que decorrem desde que a transmissão de um grupo começa na *j*-ésima saída até que o *i*-ésimo usuário deste grupo começa a ser servido. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $i \geq 1$, tem-se, através da teoria de renovação, que :

$$\overline{W_2} = \frac{\overline{V_2} - \overline{V}}{2\overline{V}} \qquad (58)$$

Seja $\overline{W}$ o primeiro momento da variável aleatória que representa o número de segmentos que cada usuário espera até que a sua transmissão tenha início. O valor de $\overline{W}$ será dado por :

$$\overline{W} = \overline{W_1} + \overline{W_2} \qquad (59)$$

À partir do valor de $\overline{\Phi}$, pode-se obter o valor de $P_{B_{in}}$ como função da carga média de entrada *p*, em função do fator de *Speedup* *L* e do número de portas *N*. Consequentemente, é possível dimensionar os valores de *L* e de *N* a fim de que o valor de *p* não extrapole um limite à partir do qual a probabilidade de bloqueio $P_{B_{in}}$ se torna maior do que o que é desejado.

Como exemplo, podemos citar uma probabilidade de bloqueio igual a 10^{-6} para uma carga média normalizada por porta de entrada p = 0,9, quando L = 8 e $N \to \infty$. Cabe ressaltar que, quando $L = N$, os mesmos resultados com relação a $\overline{W}$ podem ser obtidos na seção 3.1 deste trabalho.

3.2) Capacidade Finita :

Seja $Q_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número de células que estão esperando pelo início de suas transmissões, na *j*-ésima fila saída $\left(j = 1,2,\ldots,N\right)$, no *n*-ésimo segmento $\left(n \geq 1\right)$. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, tem-se a seguinte relação:

$$Q_{j,n} = \max\left\{ 0\ ;\ \min\left[K\ ;\ Q_{j,n-1} + V_{j,n} - 1\right] \right\} \qquad ; n > 1 \qquad (60)$$

Como $\left\{V_{j,n}\ ;\ j = 1,2,\ldots,N\ ;\ n \geq 1\right\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas , pode-se concluir, baseando-se na equação (60), que o número de células que esperam pelo início de suas transmissões, na *j*-ésima fila, forma uma cadeia de Markov.

Seja $P_{s,t} = P\left(Q_{j,n} = s\ /\ Q_{j,n-1} = t\right)$ a probabilidade de transição, em regime estacionário, do estado s $\left(s = 1,2,\ldots,K\right)$ da cadeia para o estado t $\left(t = 1,2,\ldots,K\right)$. Pode-se obter o seguinte sistema de equações de transição de estado :

$$P_{s,t} = v_0 + v_1 \qquad ; \left(s = 0\ ;\ t = 0\right) \qquad (61)$$

$$P_{s,t} = v_{t+1} \qquad ; \left(s = 0\ ;\ 1 \leq t < \min\left(L-1, K\right)\right) \qquad (62)$$

$$P_{s,t} = v_{t-s+1} \qquad ; \left(s > 0\ ;\ s-1 \leq t < \min\left(L+s-1, K\right)\right) \qquad (63)$$

$$P_{s,t} = \sum_{n=\min\left(L,K-s+1\right)}^{L} v_n \qquad ; \left(t = \min\left(L+s-1, K\right)\right) \qquad (64)$$

$$P_{s,t} = 0 \qquad ;\ \text{em qualquer outro caso} \qquad (65)$$

com os valores de v_k , para $k = 1,2,\ldots,K-1$ sendo dados pelas equações (41) e com o valor de v_k, para $k = L$, sendo dado pela equação (42).

Seja $q_k = P\left(Q_{j,n} = k\right)$, a probabilidade de haver k $\left(k = 0,1,\ldots,K\right)$ células esperando pelo início de suas transmissões na j-ésima saída, no n-ésimo segmento. À partir dos valores obtidos para $P_{s,t}$, será possível chegar aos valores de q_k, em regime estacionário, para $j = 1,2,\ldots,N$, por intermédio das seguintes equações :

$$q_k = \sum_{m=0}^{K} P_{m,k}\, q_m \qquad (66)$$

Uma saída qualquer não transmitirá células no n-ésimo segmento se não houver qualquer célula esperando para receber serviço nesta saída no segmento (n-1) e se não chegar qualquer célula a esta saída no n-ésimo segmento. Desta forma, a vazão normalizada média ρ_0 por porta de saída, em regime estacionário, será dada por :

$$\rho_0 = 1 - q_0 a_0 \qquad (67)$$

Seja $P_{B_{out}}$ a probabilidade de que ocorra, em regime estacionário, o bloqueio de uma célula em uma saída. O valor de $P_{B_{out}}$ pode ser obtido à partir da seguinte equação:

$$P_{B_{out}} = 1 - \frac{\rho_0}{p\left(1 - P_{B_{in}}\right)}$$

Seja P_B a probabilidade de que ocorra, em regime estacionário, o bloqueio de uma célula no interior do comutador. O valor de P_B será dado por :

$$P_B = 1 - \frac{\rho_0}{p} \qquad (68)$$

À partir do valor de ρ_0, pode-se obter o valor de P_B para os vários valores da carga média normalizada de entrada p, em função do tamanho das filas K e do número de portas N. Consequentemente, pode-se dimensionar os valores de K e de N a fim de que o valor de p não ultrapasse um limite à partir do qual a probabilidade de bloqueio P_B se torna maior do que a desejada.

4) Filas nas Entradas e nas Saídas :

Seja $A_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número total de células que estão destinadas para a *j*-ésima saída $\left(j = 1,2,\ldots,N\right)$ e que chegam à cabeça das filas de entrada no *n*-ésimo segmento $(n \geq 1)$.

Sob a hipótese de que o tráfego de entrada esteja uniformemente distribuído pelas saídas e sob a hipótese de que o número de células que chegam em cada porta de entrada, a cada segmento, seja uma variável aleatória de Bernoulli com taxa *p*, pode-se mostrar, quando $N \to \infty$, que a variável aleatória $A_{j,n}$ é uma variável aleatória de Poisson com taxa *p*. Define-se, para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$:

$$a_k = P\left(A_{j,n} = k\right) \qquad ; k \geq 0 \qquad (69)$$

Quando $N \to \infty$, os valores de a_k, para $k \geq 0$, serão dados por :

$$a_k = \frac{\exp(-p)p^k}{k!} \qquad (70)$$

Seja $A^*(z) = \mathrm{E}\left(z^{A_{j,n}}\right)$ a função característica da variável aleatória $A_{j,n}$. Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, a expressão de $A^*(z)$ poderá ser obtida por intermédio das seguintes equações, quando $N \to \infty$:

$$A^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k \qquad (71)$$

$$A^*(z) = \exp\left(p(z-1)\right) \qquad (72)$$

4.1) Speedup *N*, Mecanismo de *Backpressure* [4]

Seja $R_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número total de células que estão destinadas para a *j*-ésima saída $\left(j = 1,2,\ldots,N\right)$ e que permanecem bloqueadas na cabeça das filas de entrada, no *n*-ésimo segmento $\left(n \geq 1\right)$.

Seja $Q_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número de células que permanecem esperando pelo início de suas transmissões na *j*-ésima fila saída, no *n*-ésimo segmento e seja $T_{j,n}$ a variável aleatória que é definida como :

$$T_{j,n} = R_{j,n} + Q_{j,n} \tag{73}$$

Para $j = 1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$,tem-se a seguinte relação :

$$T_{j,n+1} = \max\left(0\ ;\ T_{j,n} + A_{j,n+1} - 1\right) \tag{74}$$

Seja $\overline{R} = \mathrm{E}\left(R_{j,n}\right)$ o primeiro momento da variável aleatória $R_{j,n}$, em regime estacionário. Baseando-se na equação (3), pode-se concluir, quando $N \to \infty$, que o valor de $\overline{R}$, para $j = 1,2,\ldots,N$, será dado pelo número médio de usuários que esperam, em regime estacionário, em um sistema M / D / 1 discreto com intervalo médio entre chegadas p e com serviço determinístico igual a um segmento :

Seja $\overline{T} = \mathrm{E}\left(T_{j,n}\right)$ o primeiro momento da variável aleatória $T_{j,n}$, em regime estacionário. Baseando-se na equação (74), pode-se concluir, quando $N \to \infty$, que o valor de $\overline{T}$, para $j = 1,2,\ldots,N$, será dado pelo número médio de usuários que esperam, em regime estacionário, em um sistema M / D / 1 discreto com intervalo médio entre chegadas p e com serviço determinístico e igual a um segmento :

$$\overline{T} = \frac{p^2}{2\left(1 - p\right)} \tag{75}$$

Seja $\overline{W_T}$ o primeiro momento da variável aleatória que representa o número de segmentos que decorrem desde que uma célula chega à cabeça de uma das filas de entrada até o instante em que começa a sua transmissão em uma das portas de saída. Pode-se obter o valor de $\overline{W_T}$, por intermédio do teorema de Little, através da seguinte expressão:

$$\overline{W_T} = \frac{\overline{T}}{p} = \frac{p}{2(1-p)} \qquad (76)$$

Sejam $\overline{W_R}$ e $\overline{W_R^2}$, respectivamente, os dois primeiros momentos da variável aleatória que representa o número de segmentos que decorrem desde que uma célula chega à cabeça de uma das filas de entrada até o instante em que ela começa a ser transferida para uma das saídas. Os valores de $\overline{W_R}$ e de $\overline{W_R^2}$ podem ser obtidos à partir das seguintes equações :

$$\overline{W_R} = \frac{\overline{Q_K}}{p} \qquad (77)$$

$$\overline{W_R^2} = \frac{\overline{Q_K^2}}{p} \qquad (78)$$

com os valores de $\overline{Q_K}$ e de $\overline{Q_K^2}$ sendo dados por :

$$\overline{Q_K} = \overline{Q} - K(1-q_0) + \sum_{k=1}^{K}(K+1-k)q_k \qquad (79)$$

$$\overline{Q_K^2} = \overline{Q^2} - 2K\overline{Q} + K^2(1-q_0) - \sum_{k=1}^{K}(K+1-k)^2 q_k \qquad (80)$$

onde $\overline{Q}$, $\overline{Q^2}$ e q_k , são dados no apêndice I e representam, respectivamente, o primeiro momento, o segundo momento e a probabilidade de que a variável aleatória que define o número de usuários em um sistema $M / D / 1$ discreto, em um sistema M / D / 1 discreto com intervalo médio entre chegadas p e com serviço determinístico e igual a um segmento, assuma o valor k $(k \geq 0)$.

Sob a hipótese de que o número de células que chegam em cada porta de entrada, a cada segmento, seja uma variável aleatória de Bernoulli com taxa *p*, cada entrada poderá ser modelada como um sistema *Geom / G /* 1, com intervalo médio entre chegadas p e com um serviço cuja distribuição corresponde ao número de segmentos de que uma célula permanece na cebeça de uma das filas de entrada.

Seja $\overline{W_{in}}$ o primeiro momento da variável aleatória que representa o número de segmentos que decorrem desde que uma célula chega em uma porta de entrada até o instante em que ela é transferida para a cabeça da fila desta porta. O valor de $\overline{W_{in}}$ corresponderá ao número médio de segmentos que cada célula espera no sistema Geom / G / 1 que foi descrito acima e poderá ser obtido através da seguinte equação :

$$\overline{W_{in}} = \frac{p\left[\overline{\theta_{in}^2} - \overline{\theta_{in}}\right]}{2\left(1 - p\overline{\theta_{in}}\right)} \qquad (81)$$

com $\overline{\theta_{in}}$ e $\overline{\theta_{in}^2}$ correspondendo aos dois primeiros momentos da variável aleatória que representa o tempo de serviço de um usuário no sistema Geom / G / 1 que foi descrito acima :

$$\overline{\theta_{in}} = \overline{W_R} + 1 \qquad (82)$$

$$\overline{\theta_{in}^2} = \overline{W_R^2} + 2\overline{W_R} + 1 \qquad (83)$$

Seja $\overline{W}$ o primeiro momento da variável aleatória que representa o número de segmentos que decorrem desde que uma célula chega em uma porta de entrada até o instante em que a sua transmissão em uma porta de saída tem início. O valor de $\overline{W}$ pode ser obtido à partir da seguinte equação :

$$\overline{W} = \overline{W_{in}} + \overline{W_T} \qquad (84)$$

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q_K^2} - \overline{Q_K}}{2\left(1 - p - \overline{Q_K}\right)} + \frac{\overline{Q}}{p} \qquad (85)$$

Como não ocorrem perdas no interior do comutador, p também corresponderá à vazão normalizada por porta de saída, em regime estacionário. O sistema não saturará para uma vazão normalizada por porta de saída p, tal que o denominador da equação (85) seja maior que zero. Para que o comutador sature, torna-se necessário que:

$$2\left(1 - p - \overline{Q_K}\right) = 0 \tag{86}$$

Através da equação (86), poderão ser obtidos os valores da vazão normalizada média por porta de saída p que provocam saturação, em função dos valores de K, quando $N \to \infty$ e quando o tráfego de entrada é independente e uniformemente distribuído pelas saídas. A tabela abaixo resume estes resultados :

B_{out}	Vazão Máxima
0	0.5857
1	0.6713
2	0.7228
3	0.7576
…	…
14	0.8842
15	0.8888
16	0.9830
...	...
∞	1

Deve-se observar que a vazão normalizada máxima por porta de saída, em regime estacionário, converge para um valor próximo ao obtido para um sistema com filas de capacidade infinita somente nas saídas, à medida que aumenta-se o valor de K. Para um valor de K = 16, poderemos obter um desempenho, em termos de vazão máxima, muito próximo ao caso em que existem filas com capacidade infinta somente nas saídas.

4.2) Speedup L [5] :

Seja $R_{j,n}$ a variável aleatória que representa o número total de células que estão destinadas para a *j*-ésima saída $\left(j=1,2,\ldots,N\right)$ e que permanecem bloqueadas na cabeça das filas de entrada, no *n*-ésimo segmento $(n \geq 1)$. Para $j=1,2,\ldots,N$ e para $n \geq 1$, tem-se a seguinte relação :

$$R_{j,n+1} = \max\left(0 \; ; \; R_{j,n} + A_{j,n+1} - L\right) \qquad (87)$$

Seja $\overline{R} = \mathrm{E}\left(R_{j,n}\right)$ o primeiro momento da variável aleatória $R_{j,n}$, em regime estacionário. Baseando-se na equação (87), pode-se concluir, quando $N \to \infty$, que o valor de $\overline{R}$, para $j=1,2,\ldots,N$, será dado pelo número médio de usuários que esperam, em regime estacionário, em um sistema M / D / L discreto com intervalo médio entre chegadas p e com serviço determinístico igual a um segmento :

$$\overline{R} = \frac{p^2 - L(L-1)}{2(L-p)} + \sum_{k=1}^{L-1} \frac{1}{1-z_k} \qquad (88)$$

com z_k correspondendo aos zeros complexos da equação $A^*(z) - z^L = 0$.

Seja F_n a variável aleatória que representa o número total de células que são transferidas para as portas de saída no *n*-ésimo segmento e seja $\overline{F} = \mathrm{E}\left(F_n\right)$ o primeiro momento da variável aleatória F_n, em regime estacionário. Sabendo-se que, sob carga de saturação, existirá sempre uma célula em cada fila de entrada, pode-se obter o valor de $\overline{F}$, à partir das seguintes equações :

$$F_n = N - \sum_{j=1}^{N} R_{j,n} \qquad (89)$$

$$\overline{F} = N - N\,\overline{R} \qquad (90)$$

Como se supõe que não ocorrem perdas no interior do comutador, a vazão normalizada por porta de saída, em regime estacionário, também será dada por *p*. Dessa forma, pode-se obter a seguinte igualdade :

$$p = \frac{\overline{F}}{N} \qquad (91)$$

Aplicando-se na equação (91) o valor de $\overline{F}$ que foi obtido em (90), chega-se ao seguinte valor para $\overline{R}$:

$$\overline{R} = 1 - p \qquad (92)$$

Igualando-se os valores de $\overline{R}$ que foram obtidos nas equações (88) e (92) , é possível obter o valor de p que provoca a saturação do comutador :

$$1 - p = \frac{p^2 - L(L-1)}{2(L-p)} + \sum_{k=1}^{L-1} \frac{1}{1 - z_k} \qquad (93)$$

Através da equação (93), poderão ser obtidos os valores da vazão normalizada média por porta de saída p que provocam saturação, em função dos valores de L, quando $N \to \infty$ e quando o tráfego de entrada é independente e uniformemente distribuído pelas saídas. A tabela abaixo resume estes resultados :

L	**Vazão máxima**
1	0.5858
2	0.8845
3	0.9755
4	0.9956
5	0.9993
∞	1.000

Deve-se observar que a vazão normalizada máxima por porta de saída, em regime estacionário, converge para um valor próximo ao obtido para um sistema com filas de capacidade infinita somente nas saídas, à medida que aumenta-se o valor de L. Para um valor de $L = 4$, poderemos obter um desempenho, em termos de vazão máxima, muito próximo ao caso em que existem filas com capacidade infinta somente nas saídas.

5) Bibliografia:

[1] - M.J.Karol, M.G.Hluchyj, S.P.Morgan, "Input Versus Output Queueing on a Space- Division Packet Switch", IEEE Transactions on Communications, Vol. 35, N° 12, Dec 1987.

[2] - M.J.Karol, M.G.Hluchyj,"Queueing in High-Performance Packet Swtiching", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 6, No. 9, Dec 1988.

[3] - Y. Oie, M. Murata, K. Kubota, H. Miyahara, "Effect of Speedup in Nonblocking Packet Switch ", Proc. ICC '89, pp. 13.4.1 - 13.4.5 , Jun 1989.

[4] - I. Illias, W.E.Denzel, "Analysis of Packet Switches with Input and Output Queueing", IEEE Transactions on Communications, Vol. 41, No. 5, May 1993.

[5] - Y. Oie et al., "Performance Analysis of Nonblocking Packet Switch with Input and Output Buffers", IEEE Transactions on Communications, Vol. 40, No. 8, Aug 1992.

6) Apêndice I [4] - Sistema M / D / 1 Discreto :

Seja uma sistema $M\ /\ D\ /\ 1$ discreto intervalo médio entre chegada de grupos igual a p e serviço determinístico igual a um segmento. Sejam $\overline{Q}$ e $\overline{Q^2}$ o primeiro e o segundo momentos, em regime estacionário, da variável aleatória que representa o número de usuários que estão esperando no sistema. Tem-se que:

$$\overline{Q} = \frac{p^2}{2(1-p)} \qquad (94)$$

$$\overline{Q^2} = \frac{p^2\,(p^2 - p + 3)}{6\,(1 - p)^2} \qquad (95)$$

Seja q_k a probabilidade de que a variável aleatória que representa o número de usuários que estão esperando no sistema, em regime estacionário, assuma o valor k $(k \geq 0)$. Tem-se que :

$$q_k = u_0 + u_1 \qquad ; k = 0 \qquad (96)$$

$$q_k = u_{k+1} \qquad ; k \geq 1 \qquad (97)$$

com u_k sendo dados por :

$$u_0 = (1 - p) \qquad (98)$$

$$u_1 = (1-p)\left(e^p - 1\right) \qquad (99)$$

$$u_k = (1-p)\left\{\sum_{m=1}^{k}(-1)^{k-m}\exp(mp)\left[\frac{(mp)^{k-m}}{(k-m)!} + \frac{(mp)^{k-m-1}}{(k-m-1)!}\right]\right\} \qquad ; (k \geq 2) \qquad (100)$$