

MODELOS ANALÍTICOS EM TEMPO DISCRETO PARA A ANÁLISE DE
SISTEMAS COM DIFERENCIAÇÃO DE SERVIÇO

João Carmo de Almeida Neto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Luís Felipe Magalhães de Moraes, Ph.D.

Prof. Cláudio Luis de Amorim, Ph.D.

Prof. Weiler Alves Finamore, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2003

DE ALMEIDA NETO, JOÃO CARMO

Modelos analíticos em tempo discreto para a análise de sistemas com diferenciação de serviço[Rio de Janeiro] 2003

XVII, 169 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2003)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Modelos Discretos de Filas
2. Sistemas Diffserv
3. Avaliação de Desempenho

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese aos meus pais, Waldyr Carmo de Almeida e Jeanette Oliveira de Almeida, e, principalmente, à DEUS, cuja luz e inspiração foram vitais para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

À DEUS por estar sempre me acompanhando no dia a dia.

Aos meus pais pelo apoio, auxílio e educação que me forneceram durante toda a minha vida.

Ao professor Luís Felipe Magalhães de Moraes pela orientação prestada.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro a este trabalho.

Aos meus amigos do laboratório RAVEL.

Aos meus colegas da DATAPREV pela compreensão durante os momentos em que tive que me ausentar.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELOS ANALÍTICOS EM TEMPO DISCRETO PARA A ANÁLISE DE SISTEMAS COM DIFERENCIAÇÃO DE SERVIÇO

João Carmo de Almeida Neto

Março/2003

Orientador: Luís Felipe Magalhães de Moraes

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O desenvolvimento de redes com diferenciação da qualidade em função de serviços/aplicações tem despertado interesse crescente, tanto do lado das empresas operadoras e/ou concessionárias de acesso à Internet, quanto de pesquisadores e cientistas que buscam adequar novos protocolos e algoritmos usados na implementação de tais redes. Neste contexto, esta tese descreve e estuda alguns modelos analíticos em tempo discreto, que podem ser aplicados para obter valores de perda e atraso em arquiteturas de redes com serviços diferenciados (“diffserv”). Em particular, os modelos discretos são usados na modelagem dos algoritmos conhecidos por “threshold dropping” e “priority scheduling”, considerando “buffers” de tamanho finito. A abordagem envolve a utilização de Cadeias de Markov para representar o funcionamento do sistema. Os resultados de perda e atraso são obtidos para fontes de Bernoulli e MMBP (Markov Modulated Bernoulli Process). A confiabilidade do modelo é testada, sob diferentes condições de operação, através de comparações com resultados simulados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DISCRETE-TIME ANALYTICAL MODELS FOR THE ANALYSIS OF
DIFFERENTIATED SERVICES SYSTEMS

João Carmo de Almeida Neto

March/2003

Advisor: Luís Felipe Magalhães de Moraes

Department: Computing Systems Engineering

The development of networks with quality differentiation related to services/applications have provoked growing interest both to the telecommunications operators companies and/or Internet access concessionaires and researches/scientists that seek to adjust new protocols and algorithms used to build such networks. Within this context, this thesis describes and studies some discrete-time analytical models, which can be applied to obtain loss and delay values in differentiated services networks (“diffserv”). In particular, the described models are used in modelling the mechanisms called “threshold dropping” and “priority scheduling”, taking into account a finite buffer size. The approach involves Markov chain’s to represent the system behaviour. The loss and delay values are obtained through Bernoulli and MMBP (Markov Modulated Bernoulli Process) sources. The reliability of the model is tested, under different operation conditions, by comparison with simulated results.

Sumário

1	Introdução	1
2	Uma visão geral de modelagem de filas	3
2.1	Aplicações Possíveis:	4
2.1.1	Comparação entre arquiteturas distintas:	4
2.1.2	Avaliação da qualidade de serviço provida por um sistema	4
2.1.3	Dimensionamento da fila do sistema	4
2.1.4	Tarifação	4
2.1.5	Controle de Admissão	4
2.1.6	Controle de Acesso	5
2.2	Resultados existentes no ambiente Diffserv	5
2.2.1	Trabalho de S. Sahu, D. Townsley, et al.	5
2.2.2	Trabalho de M. May, J-C. Bolot et al.	6
2.2.3	Trabalho de L. Zheng e L. Zhang	7
2.2.4	Trabalho de P. Zheng e L. M. Ni	8
2.2.5	Outros resultados encontrados na literatura	8
2.3	Relação entre os modelos propostos e os resultados da literatura	9
3	Definição dos sistemas abordados	11
3.1	Disciplina Drop Tail:	13
3.2	Disciplina Threshold Dropping	13
3.3	Disciplina Priority Scheduling	14
4	Modelos Propostos	15
4.1	Características Gerais	15
4.2	Sistema GEOM/GEOM/1/B sem prioridades de descarte e sem chegadas em grupo	17
4.2.1	Características do sistema	18

4.2.2	Solução da cadeia de Markov	19
4.2.3	Obtenção das expressões para probabilidade de perda e atraso dos usuários	20
4.3	Sistema GEOM/D/1/ B_H com prioridades de descarte e chegadas em grupo	21
4.3.1	Características do sistema	21
4.3.2	Definições dos parâmetros utilizados	22
4.3.3	Modelagem Analítica	23
4.4	Sistema MMBP/D/1/ B_H com prioridades de descarte e chegadas em grupo	29
4.4.1	Características do sistema	29
4.4.2	Definições dos parâmetros utilizados	31
4.4.3	Modelagem Analítica	32
4.5	Sistema GEOM/GEOM/1/ B_H com prioridades de descarte e chegadas em grupo	38
4.5.1	Características do sistema	39
4.5.2	Modelagem Analítica	40
4.6	Sistema MMBP/GEOM/1/ B_H com prioridades de descarte e chegadas em grupo	42
4.6.1	Características do sistema	43
4.6.2	Definições dos parâmetros utilizados	45
4.6.3	Modelagem Analítica	45
4.7	Obtenção das expressões para probabilidade de perda dos usuários de alta e baixa prioridade	48
4.7.1	Sistemas com tempo de serviço determinístico	48
4.7.2	Sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço	55
4.8	Obtenção das expressões de atraso para os usuários de alta e baixa prioridade	58
4.8.1	Sistemas com tempo de serviço determinístico	59
4.8.2	Sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço	64
5	Aplicações Práticas	68
5.1	Disciplina Threshold Dropping	68
5.1.1	Resultados obtidos	69
5.2	Disciplina Priority Scheduling	96

5.2.1	Características dos modelos	96
5.2.2	Definições dos parâmetros utilizados	97
5.2.3	Modelagem Analítica	98
5.2.4	Resultados para os sistemas com distribuição GEOM para os intervalos entre chegadas	106
5.2.5	Resultados para os sistemas com fontes MMBP	106
5.2.6	Obtenção das expressões para probabilidade de perda dos usuários de alta e baixa prioridade	108
5.2.7	Obtenção das expressões para atraso dos usuários de alta e baixa prioridade	113
5.2.8	Resultados obtidos	113
5.3	Comparação das disciplinas de fila analisadas	125
6	Comparações com outros modelos de fila	127
6.1	Resultados obtidos	128
6.1.1	Disciplina Threshold Dropping	129
6.1.2	Disciplina Priority Scheduling	145
6.2	Vantagens e desvantagens dos modelos analíticos	157
7	Conclusão e Observações Finais	159
7.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	160
	Referências Bibliográficas	161
A	Solução de um sistema linear criado quando forem definidas as probabilidades da cadeia de Markov	166
B	Análise e solução de um sistema GEOM/G/1/B com transições unitárias	168

Lista de Figuras

3.1	Representação do funcionamento de uma fonte que gera tráfego de acordo com uma variável aleatória de Bernoulli	12
3.2	Representação do funcionamento de uma fonte pelo modelo MMBP	12
3.3	Esquema representando a disciplina <i>Drop Tail</i>	13
3.4	Esquema representando a disciplina <i>Threshold Dropping</i>	13
3.5	Esquema representando a disciplina <i>Priority Scheduling</i>	14
4.1	Cadeia de Markov geral	16
4.2	Esquema representando a entrada e saída de usuários	17
4.3	Cadeia de Markov de uma fila sem prioridades, com a possibilidade de chegada de 1 usuário por segmento de tempo	18
4.4	Esquema representando a transição do número de usuários armazenados do valor i para o valor j	25
4.5	Esquema representando a entrada e saída de usuários ao utilizar uma fonte MMBP	33
5.1	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.2	71
5.2	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.3	72
5.3	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.4	74
5.4	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.5	75
5.5	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.6	77
5.6	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.7	78

5.7	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.8	79
5.8	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.9	80
5.9	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.10	82
5.10	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.11	83
5.11	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.12	85
5.12	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.13	86
5.13	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.14	87
5.14	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.15	88
5.15	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.16	90
5.16	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.17	91
5.17	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.18	92
5.18	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.19	93
5.19	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.20	94
5.20	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.21	95
5.21	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.23	115
5.22	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.24	116
5.23	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.25	118
5.24	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.26	119
5.25	Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 5.27	121
5.26	Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 5.28	122
5.27	Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 5.29	123
5.28	Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 5.30	124
6.1	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.1	130
6.2	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.2	131

6.3	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.3	133
6.4	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.4	134
6.5	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.5	135
6.6	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.6	136
6.7	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.7	138
6.8	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.8	139
6.9	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.9	141
6.10	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.10	142
6.11	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.11	143
6.12	Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.12	144
6.13	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.13	146
6.14	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.14	147
6.15	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.15	149
6.16	Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.16	150
6.17	Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 6.17	152
6.18	Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 6.18	153
6.19	Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 6.19	155
6.20	Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 6.20	156
B.1	Cadeia de Markov, seguindo uma distribuição geométrica, com a pos- sibilidade de chegada de 1 usuário por segmento de tempo	169

Lista de Tabelas

5.1	Relação entre a taxa média dos usuários de alta prioridade (ρ_a), considerando $n_a = 2$, e os valores de p_1^a e p_2^a	70
5.2	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$. . .	70
5.3	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$. . .	72
5.4	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_a = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$. . .	73
5.5	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_a = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$. . .	75
5.6	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	76
5.7	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$	77
5.8	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	79
5.9	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$	80
5.10	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_a = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	81

5.11	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_a = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	83
5.12	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	84
5.13	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	85
5.14	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_a = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	87
5.15	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_a = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	88
5.16	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	89
5.17	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$	91
5.18	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	92
5.19	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$	93
5.20	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_a = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	94
5.21	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_a = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	95

5.22	Relação entre as taxas médias de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a), considerando $n_a = 2$, e os valores de p_1^a e p_2^a	114
5.23	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$. . .	115
5.24	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$. . .	116
5.25	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	117
5.26	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	119
5.27	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	120
5.28	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	121
5.29	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	123
5.30	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	124
6.1	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	129
6.2	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	131
6.3	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	132

6.4	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$	134
6.5	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$	135
6.6	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	136
6.7	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	137
6.8	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	138
6.9	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	140
6.10	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$	142
6.11	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	143
6.12	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$	144
6.13	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	145
6.14	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	147

6.15	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	148
6.16	Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	149
6.17	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	151
6.18	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	153
6.19	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	154
6.20	Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$	155

Capítulo 1

Introdução

A maioria das redes de telecomunicação existentes são de dois tipos: redes por comutação de circuitos (tipicamente encontradas em telefonia) e redes por comutação de pacotes, usadas para transmitir dados de vários tipos. Apesar do sistema aplicado em telefonia existir por mais de cem anos, o método de comutação de pacotes surgiu mais recentemente (desde 1960).

Com o surgimento de meios de transmissão capazes de proporcionar o envio de informações a grandes velocidades, começou-se a pensar nos diversos serviços que poderiam estar agregados à nova largura de banda disponível. Ao contrário da estrutura atual, que separa a transmissão de voz, vídeo e dados em meios diferentes, a nova rede de telecomunicações integraria estes tráfegos em um único sistema de transmissão utilizando a rede de pacotes. A partir desta idéia, surge a grande necessidade de desenvolver e avaliar o desempenho de estruturas capazes de suportar os novos serviços.

Sabe-se que os tipos de tráfego que serão integrados possuem diferentes demandas de qualidade de serviço (QoS). Em outras palavras, cada fluxo de entrada possui a sua respectiva tolerância em termos de, por exemplo, perda, atraso e jitter. Desta forma, durante o projeto da futura rede de telecomunicações, deve-se considerar a diferença de tratamento dos tráfegos existentes de acordo com as suas respectivas necessidades.

Dentro deste contexto, surge o esquema chamado Diffserv [1, 2, 3], que utiliza disciplinas de filas dentro dos roteadores e comutadores. Neste caso, serão associadas prioridades diferentes aos pacotes que não possuem a mesma qualidade de serviço. Através deste recurso, torna-se possível o tratamento diferenciado dos diversos fluxos envolvidos.

Da mesma forma que surgiram arquiteturas que permitem a diferenciação de ser-

viços (Diffserv), também aparece a necessidade de quantificar o desempenho destas arquiteturas. Esta tarefa pode ser realizada tanto por simulação numérica quanto por modelagem analítica. Com este recurso pode-se comparar e avaliar as diferentes disciplinas de filas (RIO, RED etc.) utilizadas para armazenar os fluxos com prioridades distintas. Portanto, a análise de desempenho surge acompanhando as novas arquiteturas com qualidade de serviço.

Em termos de simulação, diversos estudos foram realizados para estudar as características de sistemas Diffserv e sugerir novas soluções que fornecem qualidade de serviço (QoS). Como exemplo, pode-se citar os resultados encontrados nas referências [4, 5, 6]. Em [4, 5], os autores avaliam o desempenho de arquiteturas Diffserv na Internet. Em [6], apresenta-se uma estrutura que classifica e atende os diferentes tipos de tráfegos produzidos por um assinante de serviços diferenciados. O objetivo deste trabalho é prover uma divisão adequada da largura de banda disponível e estabelecer regras para a implementação deste mecanismo.

Ao estudar diversos artigos sobre Diffserv, como, por exemplo, as referências [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], nota-se uma carência em relação à modelos analíticos de filas capazes de fornecer valores de qualidade de serviço. Desta forma, o trabalho proposto está voltado a suprir parte desta deficiência. Em outras palavras, esta tese realizará a modelagem analítica de arquiteturas associadas à diferenciação de serviços na Internet.

Capítulo 2

Uma visão geral de modelagem de filas

Muitos trabalhos foram desenvolvidos a fim de proporcionar a análise matemática de disciplinas de filas. A partir de teorias probabilísticas simples, uma grande quantidade de sistemas podem ser estudados. Algumas referências básicas para a abordagem deste assunto são citadas em [13, 14, 15].

Em [14] verifica-se uma evolução a partir de casos elementares até modelos com características mais complexas e genéricas. Durante o desenvolvimento do texto define-se propriedades básicas e teoremas importantes relacionados à análise de sistemas com parâmetro contínuo e discreto. Através deste trabalho, também é possível verificar a aplicação da modelagem de filas em ambientes computacionais e em redes de computadores.

Na referência [15], Mischa Schwartz analisou o assunto de modelagem analítica e caracterização de fontes de forma abrangente e didática. Durante a leitura encontram-se exemplos de aplicações envolvendo tráfegos de áudio, vídeo e dados. Neste caso, também foram apresentados os chamados *modelos de fonte fluida*, fontes *MMPP* (*Markov Modulated Poisson Process*) e fontes *Liga-Desliga* ou *On-Off*. Apesar deste trabalho ser mais complexo do que o desenvolvido por Kleinrock [14], esta é uma referência importante para quem deseja estudar modelagem de filas.

As aplicações da modelagem analítica são diversas. Na próxima seção alguns exemplos são apresentados e definidos.

2.1 Aplicações Possíveis:

2.1.1 Comparação entre arquiteturas distintas:

Dentro do contexto das disciplinas de filas surgem várias arquiteturas que se propõem a solucionar o problema de prover qualidade de serviço (QoS) aos tráfegos de entrada. A fim de efetuar uma comparação entre sistemas distintos, a modelagem analítica fornece informações necessárias para analisar o funcionamento de cada arquitetura. A partir dos resultados obtidos, conclui-se qual disciplina de fila é a mais apropriada ao serviço proposto.

2.1.2 Avaliação da qualidade de serviço provida por um sistema

A modelagem analítica permite que o projetista possa facilmente obter a qualidade de serviço associada a um determinado sistema. A partir deste recurso, pode-se associar o comportamento dos valores de desempenho com a variação das características da fila (distribuição do tempo de serviço, tamanho da fila, etc.).

2.1.3 Dimensionamento da fila do sistema

Neste caso verifica-se o impacto do tamanho da fila no desempenho de uma arquitetura. O projetista também pode analisar até que ponto é possível alterar este dimensionamento e, ao mesmo tempo, manter o serviço oferecido dentro de uma qualidade adequada.

2.1.4 Tarifação

Nesta abordagem, a partir das exigências de QoS dos diferentes fluxos existentes, associa-se os valores a serem cobrados com os tipos de tráfego que circulam na rede. Portanto, quanto maior for a sensibilidade das aplicações em termos de, por exemplo, perda, atraso e jitter, maior será o custo.

2.1.5 Controle de Admissão

Este tipo de controle é necessário devido à capacidade limitada de recursos na rede. Desta forma, a partir da qualidade de serviço oferecida aos tráfegos que utilizam o sistema, deve-se avaliar o impacto associado à entrada de um novo fluxo e, de acordo com esta análise, permitir ou não a admissão deste fluxo. No ambiente

Diffserv, os chamados *Serviços Premium* [3, 16] devem ser aprovados neste controle durante a especificação da “taxa máxima” associada ao tráfego produzido pelas fontes.

2.1.6 Controle de Acesso

Uma vez que a conexão esteja estabelecida, um controle deve ser mantido na entrada da rede para garantir que todos os tráfegos admitidos se limitem às respectivas qualidades de serviço negociadas durante o controle de admissão. Desta forma, os tráfegos existentes na rede não se prejudicam mutuamente. Uma vez seja verificado que um fluxo excedeu as suas características de serviço negociadas, pode-se marcar a porção do tráfego que violou o limite estabelecido com uma prioridade inferior à do restante do fluxo. Através de modelos analíticos, pode-se verificar o tratamento associado aos pacotes com prioridades distintas. No ambiente Diffserv, esta característica é enfatizada nos *Serviços Assegurados* [3, 16, 17].

2.2 Resultados existentes no ambiente Diffserv

Durante a especificação de ambientes que proporcionem qualidade de serviço (QoS) na Internet, muitos modelos foram desenvolvidos para avaliar as características das soluções propostas. Dentro deste contexto, diversos trabalhos relacionados à análise de desempenho de arquiteturas Diffserv foram apresentados por diversos autores. Desta forma, dentre alguns exemplos de modelos de filas associados à Diffserv, pode-se citar:

2.2.1 Trabalho de S. Sahu, D. Townsley, et al.

Em [18] Sahu e sua equipe examinaram dois aspectos importantes para uma arquitetura Diffserv: (1) Como um equipamento deve tratar tráfegos de diferentes prioridades? (2) Qual seria o impacto na rede caso sejam admitidas unidades de informação que excedem o perfil negociado no controle de admissão? A partir destes objetivos, foram desenvolvidos modelos analíticos para comparar o comportamento da perda e do atraso providos pelas disciplinas de fila *Threshold Dropping* e *Priority Scheduling*. De acordo com a utilização de duas prioridades distintas (alta e baixa), considera-se dois mecanismos para tratar os pacotes recebidos. Enquanto o primeiro admite, com uma prioridade baixa, o tráfego que ultrapassa o limite previamente

negociado(*edge-marking*), o segundo o descarta (*edge discarding*).

Na primeira parte deste trabalho analisa-se os valores de perda e atraso obtidos durante a aplicação do mecanismo *edge discarding*. Através de uma comparação dos sistemas abordados, verifica-se que a disciplina *Priority Scheduling* transmite o tráfego de alta prioridade com um atraso menor. Em termos de perda, verificou-se que ambas as arquiteturas *Diffserv* fornecem valores similares para as unidades de informação de alta prioridade, com excessão dos casos envolvendo fontes em rajada, onde o mecanismo *Threshold Dropping* fornece um melhor desempenho. A partir destas conclusões, é sugerido que a disciplina *Priority Scheduling* seja utilizada quando houver aplicações sensíveis ao atraso.

A segunda parte do estudo examina o efeito na vazão da rede se forem admitidos, com uma prioridade baixa, pacotes de uma conexão TCP que excedem o perfil negociado durante o controle de admissão. Neste caso, o tráfego de alta prioridade refere-se aos pacotes que respeitam os limites estabelecidos. Através de uma análise, foi descoberto que é possível melhorar significativamente a vazão mesmo quando uma pequena quantidade de tráfego de alta prioridade é transmitida. Contudo, para aproveitar melhor esta característica, as fontes TCP devem avaliar cuidadosamente a quantidade de pacotes de baixa prioridade que serão enviados com os de alta.

É importante mencionar que, na primeira parte do trabalho, foram utilizadas fontes que seguem os modelos de Poisson e *Liga-Desliga (On-Off)*. No caso do tempo de serviço dos pacotes, considerou-se uma variável aleatória exponencial com parâmetro μ . Desta forma, conclui-se que, como a ocupação da fila reflete o número de pacotes armazenados, este sistema está associado à uma fila elástica. Em outras palavras, como cada pacote é servido em um tempo variável, o tamanho da fila é alterado de acordo com o tamanho das unidades de informação armazenadas.

Em termos de possíveis aplicações, verifica-se que os valores obtidos dos modelos analíticos podem ser utilizados para executar as funções dos itens 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3.

2.2.2 Trabalho de M. May, J-C. Bolot et al.

Em [16] estuda-se várias disciplinas de fila envolvendo Diffserv a fim de quantificar a qualidade de serviço que é fornecida. Os valores analisados são de perda, atraso e vazão, sendo que o tráfego utilizado é o de Poisson. Através destas características, são definidos modelos analíticos relacionados aos serviços *Premium* e *Assegurado*. As disciplinas de filas abordadas são *RED*, *RIO*, *Pushout* e *Threshold Dropping*. O

objetivo deste trabalho é verificar os benefícios obtidos das arquiteturas Diffserv e comparar as filas deste esquema com os sistemas que não provêem diferenciação de tráfego.

Os resultados obtidos são úteis devido às suas aplicações nas áreas de dimensionamento e configuração. Enquanto é possível empregar a análise deste trabalho nos serviços *Assegurados* para determinar o tamanho das filas, nos serviços *Premium* pode-se utilizar os resultados obtidos para a tarifação das classes de tráfego em relação ao atraso. Além destas aplicações, também foi possível identificar os efeitos da variação dos parâmetros associados à descrição dos sistemas.

Assim como no trabalho de Sahu [18], também foram utilizadas variáveis aleatórias exponenciais para o tempo de serviço das unidades de informação. Portanto, a fila abordada também é elástica.

2.2.3 Trabalho de L. Zheng e L. Zhang

Na referência [19] aborda-se a modelagem e análise de desempenho de tráfegos com diferentes qualidades de serviço (QoS) em *redes privadas virtuais* (VPN). VPN é uma rede empresarial baseada na infraestrutura da rede pública compartilhada, mas considerando as mesmas políticas de segurança, vazão e gerenciamento aplicadas para o tráfego privado. Os resultados analíticos são obtidos através da aplicação do modelo de fluxo fluido.

Nesta abordagem, os roteadores utilizados possuem, em cada porta de saída, duas filas paralelas associada à prioridades específicas, ou seja, alta ou baixa. Neste caso, as unidades de informação de baixa prioridade somente são atendidas quando a fila de alta prioridade estiver vazia. Portanto, enquanto a fila de alta prioridade comporta o tráfego sensível ao atraso, a de baixa armazena o tráfego insensível à esta qualidade de serviço. Neste sistema, considera-se que as unidades de informação admitidas são servidas de acordo com a ordem de armazenamento. A fim de realizar um controle relacionado à prioridades de descarte, diversos limites também estão associados à cada fila. É importante mencionar que todos os fluxos direcionados para a mesma saída do roteador são armazenados neste tipo de arquitetura.

Os resultados numéricos obtidos da análise mostram que os serviços diferenciados apresentados satisfazem as exigências de QoS relacionadas à serviços multimídia suportados por VPN.

2.2.4 Trabalho de P. Zheng e L. M. Ni

Em [20] estuda-se o impacto de arquiteturas não-Diffserv no desempenho de uma rede cuja proposta é fornecer diferenciação de serviços. Em outras palavras, é realizada uma análise na degradação do nível de serviço associado ao tráfego com exigência de QoS quando existem domínios com arquiteturas Diffserv e não-Diffserv no caminho destas unidades de informação. Desta forma, compara-se o desempenho “fim-a-fim” deste sistema com o caso onde somente existem arquiteturas Diffserv durante todo o percurso do tráfego relacionado ao serviço prestado.

Nesta abordagem, enquanto as arquiteturas não-Diffserv estão associadas à filas sem prioridades de descarte, os domínios com Diffserv utilizam duas filas paralelas (com prioridades alta e baixa) para armazenar e atender as aplicações com diferentes valores de QoS. Durante este trabalho, também é desenvolvido um fator para medir o nível de degradação no serviço das unidades de informação de alta prioridade quando existem arquiteturas que não suportam diferenciação de serviço no caminho deste tráfego.

Através da análise quantitativa realizada por P. Zheng et al., observa-se as características associadas ao desempenho das aplicações que atravessam domínios com Diffserv e sem Diffserv.

2.2.5 Outros resultados encontrados na literatura

Na referência [21], Firoiu et al. apresentam os recentes avanços nas teorias e modelos para o estudo da qualidade de serviço na Internet. Neste trabalho foi abordada a teoria de “cálculo da rede”, sendo que a aplicação deste recurso é ilustrada em serviços integrados e diferenciados. Esta abordagem fornece limites máximo e mínimo à qualidade de serviço provida pela rede analisada. Em termos de garantias estatísticas de desempenho, diversos resultados probabilísticos são obtidos para dimensionar serviços diferenciados.

Em [22], foi estudado o fornecimento de serviços com “vazão diferenciada” para fluxos TCP através da utilização de um novo mecanismo envolvendo *token buckets*. Este mecanismo divide os tráfegos admitidos através de dois tipos de marcação dos pacotes. Neste trabalho, obteve-se, a partir de modelos de fluxo fluido, as características associadas ao funcionamento dos *token buckets* (taxa de transmissão, etc.) para que seja fornecida uma vazão mínima garantida no atendimento dos tráfegos envolvidos.

Na referência [23], avalia-se o desempenho da estrutura proposta para fornecer qualidade de serviço “fim-a-fim” na Internet. Iida et al. examinam quantitativamente dois tipos de redes que compõem um serviço com Diffserv: redes de acesso e redes de domínio. Devido à baixa velocidade das redes de acesso, os limites estatísticos dos valores de atraso dos pacotes são analisados através dos resultados numéricos obtidos. No estudo das redes de domínio, avalia-se os valores de probabilidade de perda dos tráfegos envolvidos.

Em [24], são desenvolvidos modelos simples para analisar o comportamento de uma conexão TCP em uma rede Diffserv. Neste trabalho, os modelos desenvolvidos caracterizam a vazão do tráfego TCP como uma função da taxa contratada, da taxa de perda de pacotes e do tempo de envio e recebimento dos pacotes (*round-trip time*) associados às classes de prioridade abordadas.

Na referência [25], é proposto um ambiente (*framework*) para prover qualidade de serviço estatística fim-a-fim em uma rede. A partir dos resultados deste trabalho, Reisslein et al. propõem um controle de admissão capaz de acomodar as piores características que podem estar relacionadas aos tráfegos existentes.

2.3 Relação entre os modelos propostos e os resultados da literatura

No trabalho desenvolvido são analisadas duas das disciplinas de fila abordadas em [16, 18], ou seja, *Threshold Dropping* e *Priority Scheduling*, mas considerando uma modelagem em tempo discreto. Desta forma, esta tese apresenta uma alternativa para o estudo quantitativo destas arquiteturas encontradas em Diffserv.

Através de uma análise, verifica-se que os modelos desenvolvidos nos próximos capítulos podem ser utilizados para estudar os sistemas propostos em [19, 20]. No caso da referência [19], o mecanismo apresentado por Zheng et al. engloba características das disciplinas de fila estudadas neste trabalho.

Na referência [21], são apresentados resultados analíticos que representam uma alternativa para o estudo de arquiteturas Diffserv. Apesar da disponibilidade do método apresentado por Firoiu et al., a abordagem desta tese fornece valores exatos de qualidade de serviço, enquanto a teoria de “cálculo de rede” [21], somente calcula os limites máximo e mínimo para estes dados.

Ao analisar os trabalhos apresentados na literatura, verifica-se que os modelos analíticos desenvolvidos nesta tese representam uma fonte importante para estudar

o comportamento de mecanismos relacionados à Diffserv. Desta forma, diversos esquemas de controle (acesso e admissão) podem ser obtidos a partir dos resultados que serão descritos nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Definição dos sistemas abordados

Em contraposição aos modelos analíticos geralmente encontrados na literatura, foi desenvolvido um modelo em tempo discreto [26, 27, 28]. Este tipo de análise é de grande importância no contexto das Redes de Alta Velocidade, pois pode considerar, em um segmento de tempo, a chegada de mais de uma unidade de informação nos comutadores e roteadores (chegadas em grupo). Em sistemas de transmissão contemporâneos com elevada taxa de transmissão, considera-se este tipo de modelagem analítica como um recurso útil e eficaz para a análise de desempenho. A partir da necessidade de novos métodos para caracterização de sistemas, procurou-se por uma abordagem original e com aplicações práticas.

Ao mesmo tempo que foi escolhido o tipo das variáveis aleatórias (discretas) que caracterizarão o sistema, também determinou-se o funcionamento das fontes que representarão o tráfego de chegada. Através da representação apropriada das aplicações existentes é possível obter valores de desempenho próximos da realidade. Desta forma, foram abordados dois tipos de emissão de usuários (unidades de informação): fontes que produzem usuários de acordo com uma variável aleatória de Bernoulli e fontes MMBP (*Markov Modulated Bernoulli Process* ou Processo de Bernoulli Modulado por Markov) [29, 30].

As fontes representadas por uma variável aleatória de Bernoulli geram, em um segmento de tempo, uma unidade de informação com probabilidade p ou não geram com probabilidade $1 - p$. Este funcionamento ocorre de acordo com o esquema da figura 3.1. No caso de fontes MMBP, tem-se um modelo muito similar ao da fonte *Liga-Desliga* ou *On-Off*. Neste caso, supondo que a fonte está no estado E_i , a chegada de uma unidade de informação em um segmento de tempo ocorre a partir de um processo de Bernoulli com probabilidade p_i . A representação deste modelo pode ser vista na figura 3.2. Neste trabalho, supõe-se que quando a Cadeia de

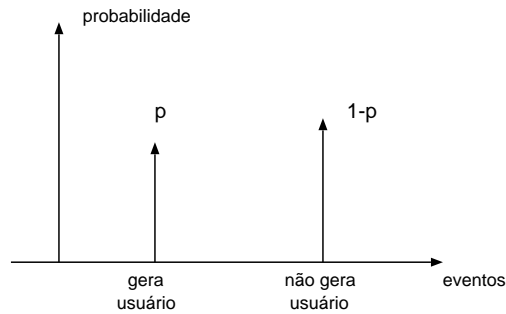


Figura 3.1: Representação do funcionamento de uma fonte que gera tráfego de acordo com uma variável aleatória de Bernoulli

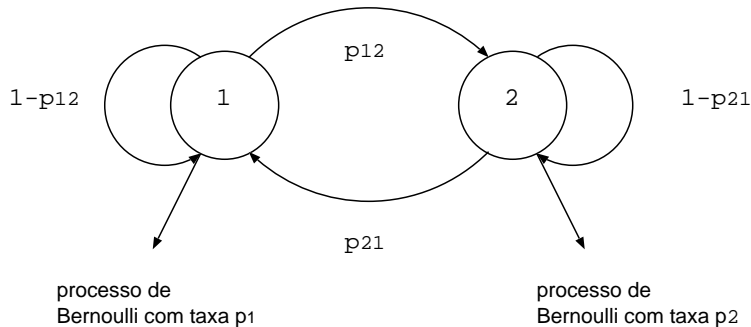


Figura 3.2: Representação do funcionamento de uma fonte pelo modelo MMBP

Markov da figura 3.2 está no estado E_1 a fonte gera tráfego com intensidade alta e quando no estado E_2 com intensidade baixa. As fontes que seguem a distribuição de Bernoulli também são chamadas de não correlacionadas, enquanto que as fontes MMBP são chamadas de fontes correlacionadas.

Em termos de disciplinas de filas, verifica-se que o estudo realizado pode ser aplicado nas arquiteturas *Drop Tail*, *Threshold Dropping* e *Priority Scheduling*. Apesar da disciplina *Drop Tail*, descrita em 3.1, não efetuar um tratamento de prioridades, este modelo serve como uma etapa inicial para o desenvolvimento de métodos para a análise de mecanismos com QoS, como a disciplina *Threshold Dropping*. Desta forma, foi realizado um estudo evolutivo visando obter resultados para modelos com diferenciação de serviços a partir de sistemas mais simples.

Apesar das arquiteturas Diffserv estudadas possuírem características particulares de funcionamento, as idéias utilizadas neste trabalho servem de base para a análise de desempenho de várias disciplinas de fila (RIO, RED etc). A fim de reduzir a complexidade dos modelos, foram considerados dois tipos de prioridades de descarte: alta e baixa. Através do estudo de alguns sistemas pode-se obter a análise de desempenho de muitas arquiteturas que provêem diferenciação de serviços.

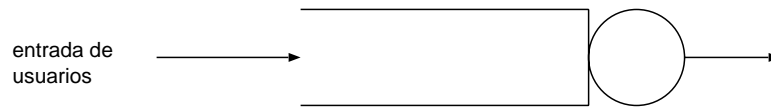


Figura 3.3: Esquema representando a disciplina *Drop Tail*

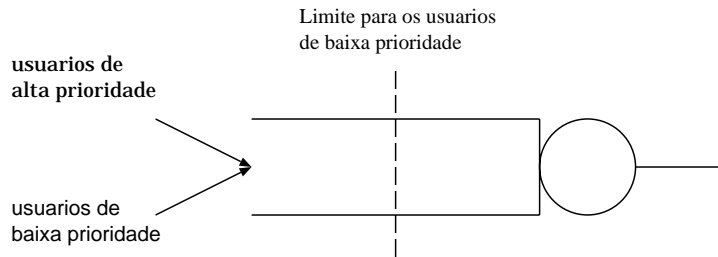


Figura 3.4: Esquema representando a disciplina *Threshold Dropping*

A descrição das disciplinas abordadas pode ser vista a seguir:

3.1 Disciplina Drop Tail:

Neste caso, os usuários são armazenados na fila enquanto houver espaço disponível. Portanto, um usuário é descartado se a fila estiver cheia quando ele chegar. Após a admissão, as unidades de informação são servidas de acordo com a ordem de armazenamento. Em outras palavras, as unidades que estiverem mais próximas ao servidor serão atendidas antes das que estiverem mais afastadas. Esta disciplina é representada na figura 3.3.

3.2 Disciplina Threshold Dropping

Nesta disciplina os tráfegos de alta e baixa prioridade são aceitos até um determinado limite especificado na fila, sendo que, após este limite, somente o fluxo de alta prioridade pode ser admitido enquanto houver espaço disponível no sistema [16, 18]. Desta forma, pode-se distinguir o serviço de fluxos de alta e baixa prioridade pelas suas respectivas probabilidades de perda. Após o armazenamento do tráfego admitido, as unidades de informação serão servidas de forma idêntica à descrita na disciplina *Drop Tail*, ou seja, de acordo com a ordem na fila. A representação deste sistema pode ser vista na figura 3.4.

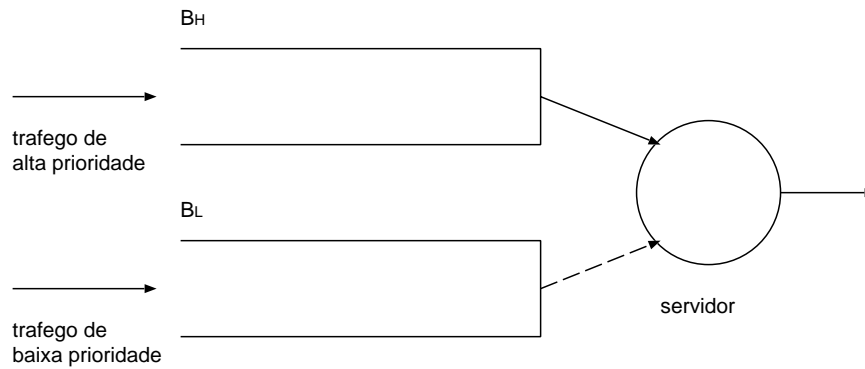


Figura 3.5: Esquema representando a disciplina *Priority Scheduling*

3.3 Disciplina Priority Scheduling

Neste caso, tem-se um sistema que armazena os tráfegos de alta e baixa prioridade em filas diferentes, sendo que os usuários de baixa prioridade somente são atendidos quando todos os de alta prioridade forem servidos [5, 18]. Observa-se que as unidades de informação dos tráfegos envolvidos são perdidas quando os respectivos limites de armazenamento forem excedidos. Assim como nas subseções 3.1 e 3.2, a ordem de serviço dos usuários em cada fila está associada à ordem de armazenamento. A partir destes conceitos encontra-se o esquema representado na figura 3.5.

Capítulo 4

Modelos Propostos

4.1 Características Gerais

Nesta tese procura-se desenvolver uma abordagem evolutiva e baseada na utilização de Cadeias de Markov para caracterizar os sistemas estudados. Em termos de representação, será utilizada a notação de Kendall [14] para destacar o funcionamento básico dos modelos desenvolvidos. Inicialmente, será realizada a análise de sistemas que não envolvem prioridades de descarte e, em seguida, são abordados alguns casos que envolvem esta característica.

As unidades de informação armazenadas nos referidos sistemas são, genericamente, denominadas usuários. Nos casos em que for analisado o desempenho de arquiteturas Diffserv, as unidades de informação serão divididas em duas prioridades de descarte distintas: alta e baixa. O tratamento de cada prioridade estará associado à disciplina de fila abordada.

Através da Cadeia de Markov de cada modelo proposto obtém-se a distribuição de probabilidade, em estado estacionário, do número de usuários no sistema. A partir desta informação, diversas medidas de desempenho podem ser extraídas. Dentre as possibilidades, serão enfatizados os valores conhecidos como *probabilidade de perda* e *atraso* dos usuários, dados de extrema importância na área de qualidade de serviço [31, 32, 33, 34]. Apesar das expressões associadas a estes valores serem distintas, ambas utilizam a distribuição de probabilidade obtida.

De acordo com o que foi especificado no capítulo 3, serão utilizadas fontes de Bernoulli e MMBP para representar o fluxo de unidades de informação [29, 30]. Para cada tipo de fonte são necessárias Cadeias de Markov com características próprias para modelar o sistema. No caso envolvendo fontes de Bernoulli, tem-se que os estados da Cadeia de Markov utilizada possuem somente uma variável de estado,

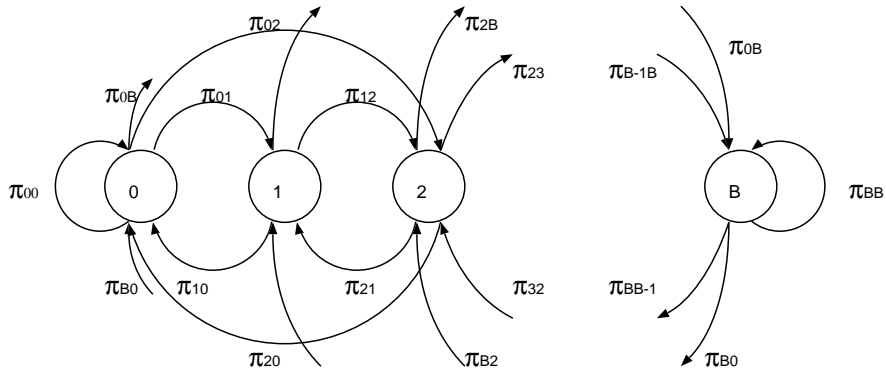


Figura 4.1: Cadeia de Markov geral

ou seja, o número de usuários no sistema (número na fila + o que está sendo atendido). A estrutura desta Cadeia de Markov pode ser genericamente representada pelo esquema da Figura 4.1, onde π_{ij} representa a probabilidade de transição do estado i para o estado j . No caso de fontes MMBP considera-se, como variável de estado, não somente o número de usuários no sistema, mas também o número de fontes de alta ou baixa prioridade no estado E_1 (ver Figura 3.2).

A partir da definição dos tipos de fontes verifica-se que a variável aleatória de Bernoulli é utilizada em ambos os casos. Apesar das fontes MMBP não aplicarem este comportamento diretamente, a emissão de usuários funciona de acordo com um processo de Bernoulli nos estados E_1 e E_2 . Desta forma, é possível utilizar a propriedade denominada *BASTA* (*Bernoulli Arrival See Time Averages*). Em outras palavras, a probabilidade de um usuário, ao chegar no sistema, encontrar a estrutura ocupada até uma posição X é igual à probabilidade de haver X unidades de informação armazenadas em qualquer intervalo de tempo.

Dentro das disciplinas de filas estudadas, serão considerados dois tipos de chegadas de usuários: simples e em grupo. Portanto, para cada segmento de tempo, enquanto no primeiro caso somente uma unidade de informação pode ser gerada, na segunda abordagem dois ou mais usuários, originados de fontes mutuamente independentes, podem chegar no sistema [35, 36, 37]. Desta forma, define-se que os sistemas analisados armazenam, em uma fila específica, os usuários admitidos em segmentos de tempo distintos de acordo com a ordem de chegada e os que entram no mesmo segmento de tempo de forma aleatória.

Em relação à chegada e saída de usuários, considera-se que tanto a entrada quanto o término do serviço ocorrem no início do segmento de tempo, sendo que a saída de um usuário libera espaço para o armazenamento do tráfego de entrada.

Este esquema é representado na Figura 4.2. A partir desta figura, verifica-se as seguintes características:

- O instante em que o sistema é observado ocorre antes do momento em que uma unidade de informação pode estar concluindo o seu atendimento;
- Se o sistema possuir i unidades de informação ($i \neq 0$) armazenadas no momento em que é observado e ocorrer a saída do usuário em atendimento, o primeiro usuário (ou grupo de usuários) que entrar na fila, no próximo segmento de tempo, encontrará o sistema contendo $i - 1$ unidades de informação.
- Caso o sistema esteja vazio quando for inicialmente observado e, em seguida, chegarem i usuários, serão encontradas i unidades de informação armazenadas quando o sistema for novamente observado no segmento de tempo consecutivo.

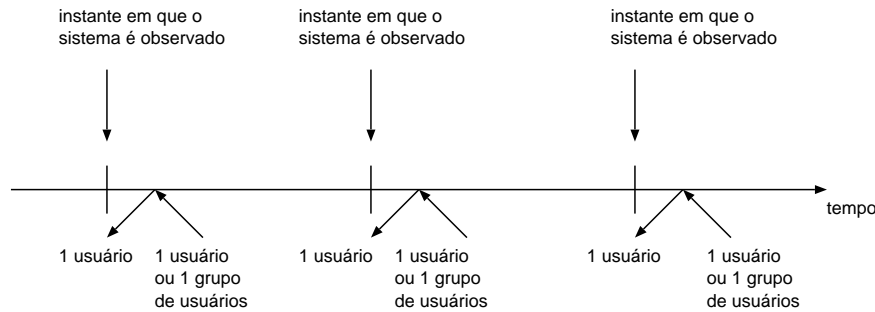


Figura 4.2: Esquema representando a entrada e saída de usuários

Nas próximas seções será realizada uma análise evolutiva, iniciando pelo caso onde não existem chegadas em grupo e prioridades de descarte.

4.2 Sistema GEOM/GEOM/1/B sem prioridades de descarte e sem chegadas em grupo

Nesta seção, será abordado um dos casos mais simples envolvendo o sistema GEOM/G/1/B. Desta forma, não ocorre a chegada ou o serviço de mais do que um usuário em um segmento de tempo e as unidades de informação também não possuem uma qualidade de serviço diferenciada. A disciplina analisada chama-se *Drop Tail* (subseção 3.1), sendo que pode-se armazenar, no máximo, B usuários. A Cadeia de Markov que representa este funcionamento pode ser vista na Figura 4.3.

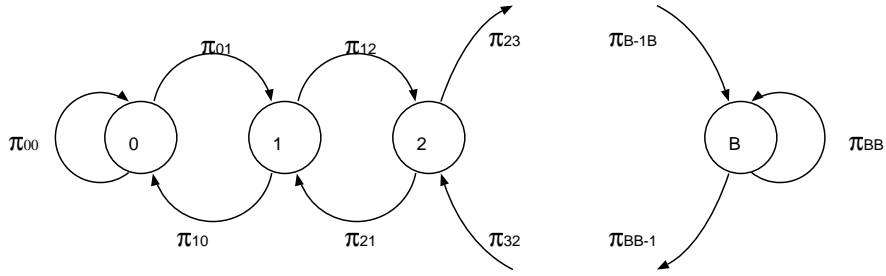


Figura 4.3: Cadeia de Markov de uma fila sem prioridades, com a possibilidade de chegada de 1 usuário por segmento de tempo

4.2.1 Características do sistema

Intervalos entre chegadas

Seja A_n a variável aleatória que representa o número de usuários chegando ao sistema no n -ésimo segmento. Desta forma, como a emissão da fonte segue uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p , tem-se:

$$P(A_n = 0) = 1 - p$$

$$P(A_n = 1) = p$$

Definindo-se T_n como a variável aleatória associada ao tamanho do intervalo entre as chegadas dos usuários n e $n + 1$, encontra-se a seguinte distribuição geométrica para T_n :

$$P(T_n = k) = (1 - p)^{k-1}p; (k \geq 1)$$

Intervalos de serviço

Seja B_n a variável aleatória que representa o número de usuários saindo do sistema no n -ésimo segmento. Desta forma, como o término do serviço dos usuários segue uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro β , tem-se:

$$P(B_n = 0) = 1 - \beta$$

$$P(B_n = 1) = \beta$$

Definindo-se S_n como a variável aleatória associada ao tamanho do intervalo entre as saídas dos usuários n e $n + 1$, encontra-se a seguinte distribuição geométrica para S_n :

$$P(S_n = k) = (1 - \beta)^{k-1}\beta; (k \geq 1)$$

4.2.2 Solução da cadeia de Markov

A partir das características apresentadas, conclui-se que o sistema pode ser especificado somente por uma variável de estado relacionada ao número de usuários existentes nesta estrutura. Desta forma, dado que π_{ij} representa a probabilidade de haver a transição do estado i para j , obtém-se os seguintes resultados:

$$\pi_{01} = p$$

$$\pi_{00} = 1 - p$$

$$\pi_{i+1} = p(1 - \beta); \mathbf{1} \leq i \leq \mathbf{B} - \mathbf{1}$$

$$\pi_{i-1} = \beta(1 - p); \mathbf{1} \leq i \leq \mathbf{B}$$

$$\pi_{ii} = p\beta + (1 - p)(1 - \beta); \mathbf{1} \leq i \leq \mathbf{B} - \mathbf{1}$$

$$\pi_{\mathbf{B}\mathbf{B}} = 1 - \beta(1 - p)$$

Em seguida, é definida a seguinte matriz de transição de estados:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 - p & p & 0 & \cdots & 0 \\ \beta(1 - p) & p\beta + (1 - p)(1 - \beta) & p(1 - \beta) & \cdots & 0 \\ 0 & \beta(1 - p) & p\beta + (1 - p)(1 - \beta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - \beta(1 - p) \end{pmatrix}$$

Considerando q_i como a probabilidade do sistema possuir i unidades de informação no estado estacionário e $q = [q_1, q_2, \dots, q_B]$, a cadeia de Markov é resolvida pelas equações $q = q\Pi$ e $\sum_{i=0}^B q_i$ [30].

A partir dos dados acima e da relação $q_k = \frac{\pi_{k-1k}}{\pi_{kk-1}} q_{k-1}$, obtida no Apêndice B, encontra-se a seguinte solução da Cadeia de Markov:

$$q_0 = Const; q_1 = \frac{p}{\beta(1 - p)} Const; q_2 = \frac{p^2(1 - \beta)}{\beta^2(1 - p)^2} Const; \dots; q_B = \frac{p^B(1 - \beta)^{B-1}}{\beta^B(1 - p)^B} Const$$

onde,

$$Const = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1 - \beta}\right) \sum_{k=1}^B \left(\frac{p(1 - \beta)}{\beta(1 - p)}\right)^k}$$

4.2.3 Obtenção das expressões para probabilidade de perda e atraso dos usuários

A expressão para a probabilidade de perda é obtida diretamente do teorema BASTA (Bernoulli Arrivals See Time Averages). Desta forma, a probabilidade de um usuário ser descartado é igual à probabilidade do sistema estar totalmente ocupado no instante da sua chegada. A partir desta conclusão, encontra-se:

$$p_{perda} = q_B(1 - \beta) = \frac{p^B(1 - \beta)^B}{\beta^B(1 - p)^B \left(1 + \left(\frac{1}{1 - \beta}\right) \sum_{k=1}^B \left(\frac{p(1 - \beta)}{\beta(1 - p)}\right)^k\right)} \quad (4.1)$$

No caso da expressão para o atraso utiliza-se o teorema de Little, ou seja:

$$atraso = \frac{E(N)}{\lambda(1 - p_{perda})}$$

onde,

$E(N)$ = número médio de usuários armazenados no sistema = $q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \dots + Bq_B$;

λ = taxa média de chegada dos usuários;

p_{perda} = valor obtido pela equação 4.1.

Como $\lambda = p$, tem-se o seguinte resultado:

$$atraso = \frac{E(N)}{p(1 - p_{perda})} \quad (4.2)$$

Através de uma análise, é possível verificar a elasticidade da fila utilizada para armazenar os usuários admitidos. Este fato ocorre devido ao tempo de serviço de cada unidade de informação que entra no sistema e à existência de um número fixo de usuários que podem ser armazenados. Em outras palavras, como a distribuição do tempo de serviço indica que uma unidade de informação pode levar um tempo variável para ser servida, conclui-se que o tamanho da fila é alterado de acordo com o tamanho dos usuários armazenados.

4.3 Sistema GEOM/D/1/ B_H com prioridades de descarte e chegadas em grupo

Nesta seção, considera-se o primeiro caso onde prioridades de descarte são utilizadas em uma disciplina de fila. Ao mesmo tempo que uma diferenciação de tráfego é definida, também deve ocorrer um tratamento distinto dos fluxos envolvidos. Através deste conceito, aborda-se um sistema que comporta, no máximo, B_H unidades de informação e os usuários de baixa prioridade podem ser aceitos juntamente com os de alta prioridade até um tamanho B_L , cujo valor é menor que B_H . Quando o espaço utilizado no sistema exceder B_L , somente os usuários de alta prioridade são admitidos enquanto houver espaço disponível para armazenamento. Desta forma, passa a existir uma diferença de tratamento entre os fluxos existentes.

4.3.1 Características do sistema

Intervalos entre chegadas

Sejam A_n^a e A_n^b as variáveis aleatórias que representam os números de usuários gerados no n -ésimo segmento de tempo por cada fonte de alta e baixa prioridade, respectivamente. Dado que as fontes referentes a cada prioridade de descarte seguem uma variável aleatória de Bernoulli, tem-se:

$$P(A_n^a = 0) = 1 - p_a$$

$$P(A_n^a = 1) = p_a$$

$$P(A_n^b = 0) = 1 - p_b$$

$$P(A_n^b = 1) = p_b$$

onde,

p_a = probabilidade de uma fonte de alta prioridade gerar um usuário;

p_b = probabilidade de uma fonte de baixa prioridade gerar um usuário;

Definindo-se T_n^a e T_n^b como as variáveis aleatórias que especificam os intervalos de chegada dos usuários n e $n + 1$ de alta e baixa prioridade, respectivamente, encontra-se a seguinte distribuição geométrica para T_n^a e T_n^b :

$$P(T_n^a = k) = (1 - p_a)^{k-1} p_a; (k \geq 1)$$

$$P(T_n^b = k) = (1 - p_b)^{k-1} p_b; (k \geq 1)$$

Intervalos de serviço

Através da notação de Kendall, verifica-se que o tamanho das unidades de informação que chegam no sistema é constante. Portanto, sempre que o sistema não estiver vazio, considera-se que ocorre o término do serviço de 1 usuário após cada segmento de tempo. Esta característica determina o “esvaziamento” da fila. Desta forma, tem-se a seguinte definição:

Seja S_n a variável aleatória que representa o tamanho do intervalo entre a saída dos usuários n e $n + 1$ do sistema. Dado que o sistema não esteja vazio, tem-se a seguinte distribuição:

$$P(S_n = 1) = 1$$

$$P(S_n = k) = 0$$

$$(k \neq 1)$$

4.3.2 Definições dos parâmetros utilizados

Para obter os resultados desejados, foi necessária a utilização de vários parâmetros. Estes dados são necessários para determinar as características do sistema e facilitar a compreensão do modelo. A partir deste conceito, tem-se os seguintes valores:

n_a = número de fontes de alta prioridade;

n_b = número de fontes de baixa prioridade;

X = variável aleatória que representa o número de usuários no sistema em estado estacionário (incluindo o que está em serviço);

$q_i = X(i) = P(X = i)$ = probabilidade de haver i usuários no sistema.

A partir destes dados, podem ser definidos outros tipos de equações relacionadas ao funcionamento das fontes. Desta forma, dado que a_z^b e a_y^a representam as probabilidades de serem gerados z e y usuários de baixa e alta prioridade, respectivamente, tem-se as seguintes distribuições Binomiais:

$$a_z^b = \binom{n_b}{z} p_b^z (1 - p_b)^{n_b - z} \quad (4.3)$$

$$a_y^a = \binom{n_a}{y} p_a^y (1 - p_a)^{n_a - y} \quad (4.4)$$

A partir destas expressões, tem-se:

$EAr^b = \sum_{z=1}^{n_b} za_z^b =$ número médio de usuários de baixa prioridade que chegam ao sistema;

$EAr^a = \sum_{y=1}^{n_a} ya_y^a =$ número médio de usuários de alta prioridade que chegam ao sistema;

4.3.3 Modelagem Analítica

Nesta seção, desenvolve-se a Cadeia de Markov associada ao funcionamento do sistema estudado. Após a definição desta estrutura é possível obter os valores de qualidade de serviço procurados. Sabe-se que as taxas médias de chegada dos usuários de alta e baixa prioridade (ρ_a e ρ_b) são obtidos através das seguintes expressões:

$$\rho_a = n_a p_a \tag{4.5}$$

$$\rho_b = n_b p_b \tag{4.6}$$

Definição da Cadeia de Markov

A fim de determinar a Cadeia de Markov, as expressões que caracterizam as transições de estado nesta estrutura devem ser especificadas. Assim como foi mencionado na seção 4.1, somente será utilizada uma variável de estado, representando o número de usuários armazenados no sistema. Desta forma, a matriz de transição de estados possui $(B_H + 1) \times (B_H + 1)$ elementos.

Considera-se π_{ij} como a probabilidade de haver a transição da variável de estado do valor i para j . A fim de definir as expressões utilizadas para obter π_{ij} , analisa-se quatro casos distintos:

- Os estados i e j são menores que B_L ;
- Os estados i e j são maiores que B_L e menores que B_H ;
- O estado i possui qualquer valor menor o igual a B_H e j é igual a B_H ;
- O estado i é menor ou igual a B_L mas o estado j é maior ou igual a B_L e menor que B_H .

No primeiro caso, aplica-se diretamente as equações 4.4 e 4.3 para obter a probabilidade π_{ij} . Devido à influência do número de unidades de informação inicialmente armazenado na transição de estados, a quantidade de usuários gerados pelas fontes (parâmetro r) é dividida em dois grupos: o primeiro considera que o sistema está

inicialmente vazio ($i = 0$) e o segundo considera que o sistema está inicialmente ocupado ($i > 0$). Desta forma, tem-se a seguinte expressão para i e j menores que B_L :

$$\pi_{ij} = \sum_{y=0}^r \binom{n_a}{y} p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \binom{n_b}{r-y} p_b^{r-y} (1-p_b)^{n_b-r+y} \quad (4.7)$$

onde,

$$\text{para } j \geq i \text{ e } i > 0 \rightarrow r = j - i + 1;$$

$$\text{para } j \geq i \text{ e } i = 0 \rightarrow r = j - i = j;$$

No segundo tipo de expressão é encontrada uma similaridade à primeira. Neste caso, como somente os usuários de alta prioridade serão aceitos, considera-se que a mudança de estado ocorre somente devido à chegada deste tipo de tráfego. Portanto, a seguinte expressão é obtida:

$$\pi_{ij} = \binom{n_a}{y} p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \quad (4.8)$$

onde $y = j - i + 1$.

A partir de 4.7 e 4.8 é possível verificar que a transição do estado i para $i - 1$ está sendo considerada. Isto pode ser observado se o valor de r for substituído por zero. Neste caso, as expressões de π_{ii-1} obtidas para $i \leq B_L$ e $i > B_L$ são, respectivamente, $(1-p_a)^{n_a} (1-p_b)^{n_b}$ e $(1-p_a)^{n_a}$.

Para desenvolver o terceiro tipo de expressão utiliza-se uma abordagem mais simples, ou seja, baseada nas probabilidades de transição de um determinado estado i para todos os estados com menos de B_H usuários armazenados. Através deste método, encontra-se:

$$\pi_{iB_H} = 1 - \sum_{j=0}^{B_H-1} \pi_{ij} \quad (4.9)$$

No quarto caso ocorre uma situação mais complexa. Em outras palavras, considera-se a influência da perda dos usuários de baixa prioridade. Este fato ocorre, pois, quando a quantidade de unidades de informação no sistema ultrapassa B_L todo o tráfego de baixa prioridade gerado é descartado. Desta forma, encontra-se a seguinte expressão para $i > 0$:

$$\pi_{ij} = \sum_{r=j-i+1}^{n_b+j-i+1} \sum_{y=j-B_L}^{j-i+1} \binom{n_a}{y} p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \binom{n_b}{r-y} p_b^{r-y} (1-p_b)^{n_b-r+y} c_1(r, y, j, i) \quad (4.10)$$

É importante observar que, nesta equação, as quantidades de usuários de alta e baixa prioridade geradas pelas fontes são y e $r - y$, respectivamente.

Os limites aplicados nos somatórios são obtidos a partir do fato que as unidades de informação de alta prioridade sempre são aceitas enquanto houver menos de B_H usuários armazenados no sistema. Portanto, dado que a transição da variável de estado é determinada, o número de unidades de informação de alta prioridade admitidas no sistema (parâmetro y) varia entre os casos em que ocorre a admissão máxima e mínima dos usuários de baixa prioridade, ou seja, $j - B_L$ e $j - i + 1$. Analogamente, o número de unidades de informação gerado pelas fontes (parâmetro r) varia entre os casos em que todo o fluxo de baixa prioridade é aceito e perdido, ou seja, $j - i + 1$ e $n_b + j - i + 1$. Uma representação gráfica deste tipo de transição de estado pode ser vista na Figura 4.4.

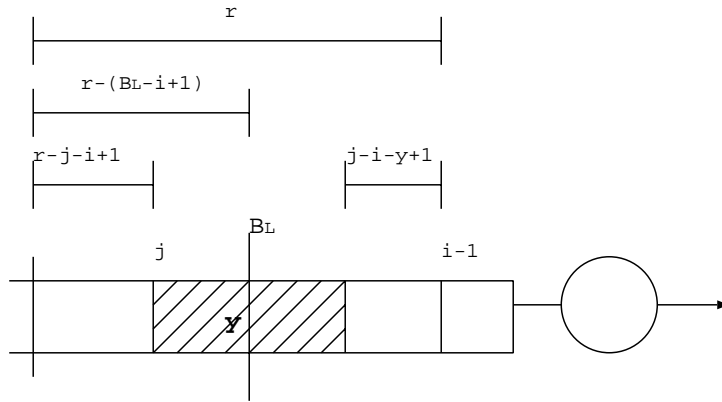


Figura 4.4: Esquema representando a transição do número de usuários armazenados do valor i para o valor j

A função $c_1(r, y, j, i)$ representa uma probabilidade diretamente ligada ao número de usuários admitidos no sistema e a distribuição deste número entre as prioridades existentes, ou seja, alta e baixa. Desta forma, existe um valor distinto para $c_1(r, y, j, i)$ para cada caso envolvendo uma quantidade de unidades de informação aceita e as respectivas parcelas de usuários de alta e baixa prioridade.

Através da Figura 4.4 pode-se verificar que, apesar da mudança da variável de estado envolvida ser do valor i para j , a transição do número de usuários armazenados no sistema ocorre do valor $i - 1$ para j . Este fato está relacionado ao término do serviço de uma unidade de informação antes que outra entre no sistema dentro do mesmo segmento de tempo. Esta característica foi mencionada no final da seção 4.1 e pode ser observada na Figura 4.2.

Como a transição de estado a partir de um sistema vazio não ocorre juntamente com o término de serviço de um usuário, as probabilidades π_{ij} devem ser recalculadas para este caso, ou seja, quando $i = 0$. Desta forma, o valor de $c_1(r, y, j, i)$ pode ser obtido de dois algoritmos: o primeiro considerando um sistema vazio antes da entrada de tráfego e o segundo quando o sistema está ocupado antes da emissão de usuários ($i > 0$). O algoritmo para obter o valor de $c_1(r, y, j, i)$, quando $i > 0$, pode ser visto abaixo.

- Caso $r = y = j - i + 1$

$$\implies c_1(r, y, j, i) = 1 \quad (4.11)$$

- Caso $r > j - i + 1$ e $j - i - y + 1 > 0$

$$\implies c_1(r, y, j, i) = \binom{r-y}{r-j+i-1} \prod_{t=0}^{r-j+i-2} \left(\frac{r-B_L+i-1-t}{r-t} \right) \prod_{t=0}^{j-i-y} \left(\frac{B_L-i+1-t}{j-i+1-t} \right) \quad (4.12)$$

- Caso $r > j - i + 1$ e $j - i - y + 1 = 0$

$$\implies c_1(r, y, j, i) = \prod_{t=0}^{r-j+i-2} \left(\frac{r-B_L+i-1-t}{r-t} \right) \quad (4.13)$$

- Caso $y \neq r = j - i + 1$

$$\implies c_1(r, y, j, i) = \prod_{t=0}^{j-i-y} \left(\frac{B_L-i+1-t}{j-i+1-t} \right) \quad (4.14)$$

Na expressão 4.11 ocorre somente a entrada de tráfego de alta prioridade. Portanto, como estes usuários são aceitos no sistema, encontra-se $c_1(r, y, j, i) = 1$.

No caso da equação 4.12, vê-se que a mudança do número de usuários no sistema ($i - 1 \rightarrow j$) é menor que o tráfego de entrada (parâmetro r) e maior que o número de unidades de informação de alta prioridade aceitas. Desta forma, uma parte do tráfego de baixa prioridade, representada pelo valor $r - j + i - 1$, é descartada e o restante é admitida. A combinação $\binom{r-y}{r-j+i-1}$ referencia o número de possíveis grupos de baixa prioridade distintos a serem perdidos. Em seguida, obtém-se as probabilidades dos usuários deste grupo serem perdidos e dos usuários restantes serem aceitos. Estes valores são representados pelos respectivos produtórios:

1.
$$\prod_{t=0}^{r-j+i-2} \left(\frac{r - B_L + i - 1 - t}{r - t} \right)$$
2.
$$\prod_{t=0}^{j-i-y} \left(\frac{B_L - i + 1 - t}{j - i + 1 - t} \right)$$

As explicações destas expressões são apresentadas a seguir:

- No momento em que o primeiro usuário de baixa prioridade a ser perdido chega ao sistema, esta unidade de informação deve ocupar uma das $r - B_L + i - 1$ posições possíveis para perda. Como existem r posições disponíveis para preenchimento dentro do grupo gerado, a probabilidade deste usuário ser perdido é $\frac{r-B_L+i-1}{r}$. No caso do segundo usuário a ser descartado, tem-se um número menor de espaços a serem ocupados, pois, uma parte das posições disponíveis dentro do grupo já foi preenchida. Portanto, a probabilidade do segundo usuário ser descartado é $\frac{r-B_L+i-2}{r-1}$. Desta forma, a probabilidade de duas unidades de informação serem perdidas é $\left(\frac{r-B_L+i-1}{r}\right) \left(\frac{r-B_L+i-2}{r-1}\right)$. Através da realização de uma indução para obter a probabilidade de $r - j + i - 1$ usuários de baixa prioridade serem perdidos, encontra-se o produto do item 1.
- Após o preenchimento de todas as posições dos usuários perdidos, determina-se as posições dos que serão aceitos. Neste caso, existe um espaço de tamanho $B_L - i + 1$ que pode ser ocupado pelo restante do tráfego de baixa prioridade, sendo que o número total de posições disponível é $j - i + 1$. Desta forma, através de uma analogia com o caso anterior, representa-se a probabilidade de $j - i - y + 1$ usuários de baixa prioridade serem aceitos pelo produto do item 2.

Na expressão 4.13, encontra-se uma situação onde todos os usuários de baixa prioridade são perdidos. Desta forma, a transição da variável de estado ocorre somente pela entrada do tráfego de alta prioridade. Este caso está relacionado à probabilidade de perda de todos os usuários de baixa prioridade. Através desta conclusão, verifica-se que a expressão 4.13 é obtida a partir do componente da expressão 4.12 relacionado com a perda do tráfego de baixa prioridade, ou seja, pelo produto do item 1.

No caso da equação 4.14, analisa-se uma situação onde todos os tipos de usuários são aceitos, ou seja, todo o tráfego de baixa prioridade é admitido. Portanto, o desenvolvimento desta expressão restringe-se a obtenção da probabilidade deste fato

ocorrer. Como pode ser observado, a equação 4.14 é idêntica ao componente da expressão 4.12 referente à admissão dos usuários de baixa prioridade (produtório do item 2).

As definições relacionadas à probabilidade π_{ij} e à função $c_1(r, y, j, i)$ quando $i = 0$ podem ser vistas abaixo. Devido ao fato destes resultados serem análogos ao caso em que $i > 0$, não serão fornecidas explicações para as expressões encontradas.

$$\pi_{0j} = \sum_{r=j}^{n_b+j} \sum_{y=j-B_L}^j \binom{n_a}{y} p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \binom{n_b}{r-y} p_b^{r-y} (1-p_b)^{n_b-r+y} c_1(r, y, j, 0) \quad (4.15)$$

- Caso $r = y = j$

$$\implies c_1(r, y, j, 0) = 1 \quad (4.16)$$

- Caso $r > j$ e $j - y > 0$

$$\implies c_1(r, y, j, 0) = \binom{r-y}{r-j} \prod_{t=0}^{r-j-1} \left(\frac{r-B_L-t}{r-t} \right) \prod_{t=0}^{j-y-1} \left(\frac{B_L-t}{j-t} \right) \quad (4.17)$$

- Caso $r > j$ e $j - y = 0$

$$\implies c_1(r, y, j, 0) = \prod_{t=0}^{r-j-1} \left(\frac{r-B_L-t}{r-t} \right) \quad (4.18)$$

- Caso $y \neq r = j$

$$\implies c_1(r, y, j, 0) = \prod_{t=0}^{j-y-1} \left(\frac{B_L-t}{j-t} \right) \quad (4.19)$$

Através da apresentação das probabilidades π_{ij} e suas respectivas explicações, finaliza-se a definição da Cadeia de Markov. É importante mencionar que o estado estacionário do sistema é obtido pelo método descrito no apêndice A.

4.4 Sistema MMBP/D/1/ B_H com prioridades de descarte e chegadas em grupo

Neste sistema, é analisado um caso análogo ao especificado na seção 4.3, mas aplicando fontes com características diferentes. Este fato ocorre, pois, são associadas fontes *MMBP* (Figura 3.2) ao tráfego de entrada. Em relação às características da Cadeia de Markov, considera-se um sistema que comporta, no máximo, B_H unidades de informação e os usuários de baixa prioridade podem ser aceitos juntamente com os de alta prioridade até um tamanho B_L . Quando o espaço utilizado no sistema exceder B_L , somente os usuários de alta prioridade são admitidos enquanto houver espaço disponível para armazenamento.

4.4.1 Características do sistema

Intervalos entre chegadas

Devido ao funcionamento das fontes MMBP (*Marvov Modulated Bernoulli Process*), desenvolve-se expressões diferentes relacionadas à emissão e ao intervalo entre a chegada de usuários para cada estado em que as fontes operam. Desta forma, tem-se as seguintes definições:

- Para fontes operando no estado E_1 :

Sejam $A1_n^a$ e $A1_n^b$ as variáveis aleatórias que representam os números de usuários gerados no n -ésimo segmento de tempo por cada fonte de alta e baixa prioridade no estado E_1 , respectivamente. Dado que as fontes associadas a cada prioridade de descarte seguem uma variável aleatória de Bernoulli, tem-se:

$$P(A1_n^a = 0) = 1 - p_1^a$$

$$P(A1_n^a = 1) = p_1^a$$

$$P(A1_n^b = 0) = 1 - p_1^b$$

$$P(A1_n^b = 1) = p_1^b$$

onde,

p_1^a = probabilidade de uma fonte de alta prioridade no estado E_1 gerar um usuário;

p_1^b = probabilidade de uma fonte de baixa prioridade no estado E_1 gerar um usuário;

Definindo-se $T1_n^a$ e $T1_n^b$ como as variáveis aleatórias que especificam os intervalos de chegada dos usuários n e $n + 1$ de alta e baixa prioridade no estado E_1 , respectivamente, encontra-se a seguinte distribuição geométrica para $T1_n^a$ e $T1_n^b$:

$$P(T1_n^a = k) = (1 - p_1^a)^{k-1} p_1^a; (k \geq 1)$$

$$P(T1_n^b = k) = (1 - p_1^b)^{k-1} p_1^b; (k \geq 1)$$

- Para fontes operando no estado E_2 :

Sejam $A2_n^a$ e $A2_n^b$ as variáveis aleatórias que representam os números de usuários gerados no n -ésimo segmento de tempo por cada fonte de alta e baixa prioridade no estado E_2 , respectivamente. Dado que as fontes associadas a cada prioridade de descarte seguem uma variável aleatória de Bernoulli, tem-se:

$$P(A2_n^a = 0) = 1 - p_2^a$$

$$P(A2_n^a = 1) = p_2^a$$

$$P(A2_n^b = 0) = 1 - p_2^b$$

$$P(A2_n^b = 1) = p_2^b$$

onde,

p_2^a = probabilidade de uma fonte de alta prioridade no estado E_2 gerar um usuário;

p_2^b = probabilidade de uma fonte de baixa prioridade no estado E_2 gerar um usuário;

Definindo-se $T2_n^a$ e $T2_n^b$ como as variáveis aleatórias que especificam os intervalos de chegada dos usuários n e $n + 1$ de alta e baixa prioridade no estado E_2 , respectivamente, encontra-se a seguinte distribuição geométrica para $T2_n^a$ e $T2_n^b$:

$$P(T2_n^a = k) = (1 - p_2^a)^{k-1} p_2^a; (k \geq 1)$$

$$P(T2_n^b = k) = (1 - p_2^b)^{k-1} p_2^b; (k \geq 1)$$

Intervalos de serviço

Através da notação de Kendall, verifica-se que o tamanho das unidades de informação que chegam no sistema é constante. Portanto, sempre que o sistema não estiver vazio, considera-se que ocorre o término do serviço de 1 usuário após cada segmento de tempo. Esta característica determina o “esvaziamento” da fila. Desta forma, tem-se a seguinte definição:

Seja S_n a variável aleatória que representa o tamanho do intervalo entre a saída dos usuários n e $n + 1$ do sistema. Dado que o sistema não esteja vazio, tem-se a seguinte distribuição:

$$P(S_n = 1) = 1$$

$$P(S_n = k) = 0$$

$$(k \neq 1)$$

4.4.2 Definições dos parâmetros utilizados

Para obter os resultados desejados, foi necessária a utilização de vários parâmetros. Portanto, além dos parâmetros apresentados na subseção 4.3.2, considera-se os seguintes valores:

$$n_a^1 = \text{número de fontes de alta prioridade no estado } E_1;$$

$$n_b^1 = \text{número de fontes de baixa prioridade no estado } E_1;$$

$$p_{12} = \text{probabilidade da fonte MMBP passar do estado } E_1 \text{ para o estado } E_2;$$

$$p_{21} = \text{probabilidade da fonte MMBP passar do estado } E_2 \text{ para o estado } E_1;$$

A partir destes dados podem ser definidas as expressões para $a_z^{n_b^1}$ e $a_y^{n_a^1}$. Estes valores representam as probabilidades de, em um segmento de tempo, chegarem z e y usuários de baixa e alta prioridade dado que existem n_b^1 e n_a^1 fontes de baixa e alta prioridade no estado E_1 , respectivamente:

$$a_z^{n_b^1} = \sum_{k=0}^z \binom{n_b^1}{k} (p_1^b)^k (1 - p_1^b)^{n_b^1 - k} \binom{n_b - n_b^1}{z - k} (p_2^b)^{z - k} (1 - p_2^b)^{n_b - n_b^1 - z + k} \quad (4.20)$$

$$a_y^{n_a^1} = \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1 - p_1^a)^{n_a^1 - k} \binom{n_a - n_a^1}{y - k} (p_2^a)^{y - k} (1 - p_2^a)^{n_a - n_a^1 - y + k} \quad (4.21)$$

A obtenção dos valores de a_y^a e a_z^b , definidos na subseção 4.3.2, está relacionada a distribuição de probabilidade do número de fontes no estado E_1 em regime estacionário. Através deste conceito, dado que $F_1^a(t)$ e $F_1^b(t)$ representam as probabilidades de t fontes de alta e baixa prioridade estarem no estado E_1 , respectivamente, tem-se as seguintes expressões:

$$a_z^b = \sum_{t=0}^{n_b} \sum_{k=0}^z \binom{t}{k} (p_1^b)^k (1 - p_1^b)^{t - k} \binom{n_b - t}{z - k} (p_2^b)^{z - k} (1 - p_2^b)^{n_b - t - z + k} F_1^b(t) \quad (4.22)$$

$$a_y^a = \sum_{t=0}^{n_a} \sum_{k=0}^y \binom{t}{k} (p_1^a)^k (1 - p_1^a)^{t - k} \binom{n_a - t}{y - k} (p_2^a)^{y - k} (1 - p_2^a)^{n_a - t - y + k} F_1^a(t) \quad (4.23)$$

Os valores de $F_1^a(t)$ e $F_1^b(t)$ são obtidos da Cadeia de Markov associada aos moduladores cuja variável de estado é o número de fontes no estado E_1 .

4.4.3 Modelagem Analítica

Assim como foi mencionado na seção 4.1, a descrição deste sistema deve considerar três variáveis de estado, ou seja, o número de unidades de informação no sistema e as quantidades de fontes de alta e baixa prioridade no estado E_1 . Portanto, surge a necessidade de rever o esquema representando a entrada e saída de usuários, incluindo a transição de estado das fontes MMBP. A partir deste conceito, obtém-se a Figura 4.5.

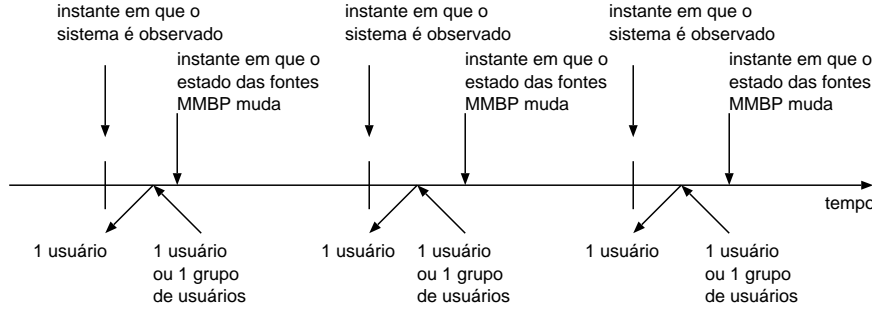


Figura 4.5: Esquema representando a entrada e saída de usuários ao utilizar uma fonte MMBP

O tráfego relativo a cada prioridade de descarte é obtido através de uma composição dos estados que as fontes podem assumir. Uma vez sendo considerado um número constante de fontes independentes e idênticas, define-se facilmente um modulador global cuja variável de estado representa, em um determinado segmento de tempo, a quantidade de fontes que opera no estado E_1 . Sendo Q_{mn} a probabilidade de ocorrer uma transição do estado m para n neste modulador e f o número total de fontes envolvidas, a seguinte expressão é encontrada:

$$Q_{mn} = \begin{cases} \sum_{l=m-n}^{\min(m, f-n)} T_m(n-m+l) S_m(l) & \text{se } m \geq n \\ \sum_{k=n-m}^{\min(n, f-m)} T_m(k) S_m(m-n+k) & \text{se } m < n \end{cases} \quad (4.24)$$

Onde,

$\min(x,y)$ = função que retorna o menor valor entre x e y ;

$T_m(k)$ = probabilidade de k fontes passarem do estado E_2 para o estado E_1 dado que m fontes estão no estado E_1 ;

$S_m(l)$ = probabilidade de l fontes passarem do estado E_1 para o estado E_2 dado que m fontes estão no estado E_1 .

Portanto, encontra-se as seguintes equações:

$$T_m(k) = \binom{f-m}{k} p_{21}^k (1-p_{21})^{f-m-k} \quad (4.25)$$

$$S_m(l) = \binom{m}{l} p_{12}^l (1-p_{12})^{m-l} \quad (4.26)$$

Como pode ser observado na expressão 4.24, esta relação representa a mudança realizada nos estados das fontes. Este conjunto de alterações resulta na transição de m para n do valor associado à variável de estado do modulador. Nesta equação, é possível verificar que os índices l e k representam a quantidade de fontes alteradas

do estado E_1 para E_2 e do estado E_2 para E_1 , respectivamente. Os valores dos limites destes índices podem ser explicados da seguinte forma:

- Quando $m \geq n$, o índice inferior do somatório ocorre quando exatamente $m - n$ fontes no estado E_1 mudam de estado, enquanto as fontes no período E_2 não sofrem alteração. O índice superior é obtido pela expressão $\min(m, f - n)$, pois, se $f - n$ for menor que m , poder-se-ia haver a transição de uma quantidade máxima de $f - n$ fontes no período E_1 . Neste caso, a alteração adequada para a variável de estado também resulta da mudança de $f - m$ fontes no estado E_2 para o estado E_1 . Seguindo o mesmo raciocínio, se o resultado de $f - n$ for maior que o número de fontes no estado E_1 antes da transição de estado, o valor m é aplicado no índice superior de l ;
- Quando $m < n$, o índice inferior do somatório ocorre quando exatamente $n - m$ fontes no estado E_2 mudam de estado, enquanto as fontes no período E_1 não sofrem alteração. O índice superior é obtido pela expressão $\min(n, f - m)$, pois, se $f - m$ for menor que n , poder-se-ia haver a transição de uma quantidade máxima de $f - m$ fontes no período E_2 . Neste caso, a alteração adequada para a variável de estado também resulta da mudança de $f - n$ fontes no estado E_1 para o estado E_2 . Seguindo o mesmo raciocínio, se o resultado de $f - m$ for maior que o número de fontes no estado E_1 após a transição de estado, o valor n é aplicado no índice superior de k ;

É importante mencionar que, no caso das fontes MMBP, os valores das taxas médias de chegada dos usuários de alta e baixa prioridade (ρ_a e ρ_b) são obtidos através das seguintes expressões:

$$\rho_a = n_a \left(p_2^a \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} + p_1^a \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \right) \quad (4.27)$$

$$\rho_b = n_b \left(p_2^b \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} + p_1^b \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \right) \quad (4.28)$$

Definição da Cadeia de Markov

Para determinar a Cadeia de Markov, deve-se especificar as expressões que caracterizam as probabilidades de transição desta estrutura. Como são utilizadas três variáveis de estado para descrever o sistema, a matriz de transição de estados possui um número de elementos maior do que foi obtido para o caso associado a fontes de Bernoulli.

O estado global do sistema deve considerar o número de fontes de alta prioridade no período E_1 , o número de fontes de baixa prioridade no período E_1 e a quantidade de usuários no sistema. Desta forma, define-se q como o vetor linha que possui $(B_H + 1) \times (n_a + 1) \times (n_b + 1)$ componentes e representa o estado estacionário do sistema. Na prática, este vetor é constituído de $(B_H + 1)$ blocos, cada um com $(n_a + 1) \times (n_b + 1)$ elementos. A partir destas características, encontra-se:

$$q = [q_{000} \quad q_{001} \quad \cdots \quad q_{00n_b} \quad q_{010} \quad \cdots \quad q_{01n_b} \quad \cdots \quad q_{0n_a 0} \quad \cdots \quad q_{0n_a n_b} \quad \cdots \quad q_{B_H n_a n_b}] \quad (4.29)$$

Onde,

$$q_{ijk} = P(X = i, n_a^1 = j, n_b^1 = k)$$

A partir de uma análise, é possível verificar que o primeiro índice de q mostra a posição do bloco que representa o número de usuários na fila. Os valores de n_a^1 e n_b^1 representam a posição do elemento dentro das submatrizes associadas ao número de fontes de alta e baixa prioridade operando no estado E_1 , respectivamente. Através de uma extensão similar, a matriz de transição de estados é formada de $(B_H + 1) \times (B_H + 1)$ blocos, sendo que dentro de cada bloco existem $(n_a + 1) \times (n_a + 1)$ submatrizes que contém $(n_b + 1) \times (n_b + 1)$ elementos. A representação desta estrutura pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi^{00} & \Pi^{01} & \cdots & \Pi^{0(n_a+n_b)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \Pi^{10} & \Pi^{11} & \cdots & \Pi^{1(n_a+n_b)} & \Pi^{1(n_a+n_b+1)} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Pi^{(B_L-(n_a+n_b))B_L} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Pi^{(B_L-(n_a+n_b)+1)B_L} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \Pi^{B_H B_H} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

A fim de exemplificar a constituição da matriz Π , toma-se o elemento Π^{00} , que representa a transição da quantidade de usuários armazenados no sistema, e expande-se as suas submatrizes em função de n_a e n_b . Primeiramente é apresentada a expansão dos blocos referentes à transição do número de fontes de alta prioridade no estado E_1 . Desta forma, a seguinte matriz é obtida:

$$\Pi^{00} = \begin{bmatrix} \Pi_{00}^{00} & \Pi_{01}^{00} & \cdots & \Pi_{0(n_a-1)}^{00} & \Pi_{0n_a}^{00} \\ \Pi_{10}^{00} & \Pi_{11}^{00} & \cdots & \Pi_{1(n_a-1)}^{00} & \Pi_{1n_a}^{00} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \Pi_{n_a 0}^{00} & \Pi_{n_a 1}^{00} & \cdots & \Pi_{n_a(n_a-1)}^{00} & \Pi_{n_a n_a}^{00} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Em seguida, vê-se a expansão em termos da transição do número de fontes de baixa prioridade no estado E_1 . Desta vez, a submatriz Π_{00}^{00} é abordada.

$$\Pi_{00}^{00} = \begin{bmatrix} \Pi_{00}^{00} & \Pi_{01}^{00} & \cdots & \Pi_{0(n_b-1)}^{00} & \Pi_{0n_b}^{00} \\ \Pi_{10}^{00} & \Pi_{11}^{00} & \cdots & \Pi_{1(n_b-1)}^{00} & \Pi_{1n_b}^{00} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \Pi_{n_b 0}^{00} & \Pi_{n_b 1}^{00} & \cdots & \Pi_{n_b(n_b-1)}^{00} & \Pi_{n_b n_b}^{00} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Para obter os valores de todos os elementos existentes na decomposição da matriz Π , utiliza-se a seguinte expressão:

$$\Pi_{cd}^{ij} = \pi_{ij}^{hc} Q_{hk}^a Q_{cd}^b \quad (4.33)$$

Onde,

Π_{cd}^{ij} = probabilidade das variáveis de estado relacionadas à ocupação do sistema e ao número de fontes de alta e baixa prioridade no estado E_1 terem os seus valores alterados de i para j , de h para k e de c para d , respectivamente.

Q_{hk}^a = probabilidade da variável de estado referente à quantidade de fontes de alta prioridade no período E_1 ter seu valor alterado, em um segmento de tempo, de h para k ;

Q_{cd}^b = probabilidade da variável de estado referente à quantidade de fontes de baixa prioridade no período E_1 ter seu valor alterado, em um segmento de tempo, de c para d ;

π_{ij}^{hc} = probabilidade de haver uma alteração de i para j no número de usuários armazenados no sistema, dado que h e c fontes de alta e baixa prioridade estão no período E_1 , respectivamente.

É possível observar que os valores de Q_{hk}^a e Q_{cd}^b são obtidos da expressão 4.24. Para obter a matriz q em estado estacionário, utiliza-se as seguintes relações:

1. $q = q\Pi$
2. $\sum_{i=0}^{B_H} \sum_{j=0}^{n_a} \sum_{k=0}^{n_b} q_{ijk} = 1$

Como o sistema de equações representado pelo item 1 é linearmente dependente, utiliza-se o método apresentado no apêndice A. Em outras palavras, substitui-se a

última equação existente no item 1 pela encontrada no item 2. Em seguida, a matriz q é obtida através de uma manipulação matricial.

A fim de obter as expressões que especificam π_{ij}^{hc} , aborda-se os mesmos casos encontrados na seção 4.3, mas considerando que o número de fontes de alta e baixa prioridade no estado E_1 é bem definido. Desta forma, analisa-se os seguintes casos:

1. Os estados i e j são menores que B_L ;
2. Os estados i e j são maiores que B_L e menores que B_H ;
3. O estado i possui qualquer valor menor o igual a B_H e j é igual a B_H ;
4. O estado i é menor ou igual a B_L mas o estado j é maior ou igual a B_L e menor que B_H .

Através de uma analogia com a seção 4.3, encontra-se as seguintes expressões para os casos 1, 2, 3 e 4, respectivamente:

1.

$$\begin{aligned} \pi_{ij}^{n_a^1 n_b^1} &= \sum_{y=0}^r \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a - n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} (1-p_2^a)^{n_a - n_a^1 - y - k} \\ &\quad \sum_{l=0}^{r-y} \binom{n_b^1}{l} (p_1^b)^l (1-p_1^b)^{n_b^1-l} \binom{n_b - n_b^1}{r-y-l} (p_2^b)^{r-y-l} \\ &\quad (1-p_2^b)^{n_b - n_b^1 - r + y + l} \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde,

$$\text{para } j \geq i \text{ e } i > 0 \rightarrow r = j - i + 1;$$

$$\text{para } j \geq i \text{ e } i = 0 \rightarrow r = j - i = j;$$

$$2. \quad \pi_{ij}^{n_a^1 n_b^1} = \sum_{k=0}^r \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a - n_a^1}{r-k} (p_2^a)^{r-k} (1-p_2^a)^{n_a - n_a^1 - r + k} \quad (4.35)$$

onde, $i \leq j$ e $r = j - i + 1$.

$$3. \quad \pi_{iB_H}^{n_a^1 n_b^1} = 1 - \sum_{j=0}^{B_H-1} \pi_{ij}^{n_a^1 n_b^1} \quad (4.36)$$

4. • Para $i > 0$

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}^{n_a^1 n_b^1} &= \sum_{r=j-i+1}^{n_b+j-i+1} \sum_{y=j-B_L}^{j-i+1} \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a-n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} \\
&(1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-y+k} \sum_{l=0}^{r-y} \binom{n_b^1}{l} (p_1^b)^l (1-p_1^b)^{n_b^1-l} \binom{n_b-n_b^1}{r-y-l} (p_2^b)^{r-y-l} \\
&(1-p_2^b)^{n_b-n_b^1-r+y+l} c_1(r, y, j, i)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

• Para $i = 0$

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}^{n_a^1 n_b^1} &= \sum_{r=j-i}^{n_b+j-i} \sum_{y=j-B_L}^{j-i} \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a-n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} \\
&(1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-y+k} \sum_{l=0}^{r-y} \binom{n_b^1}{l} (p_1^b)^l (1-p_1^b)^{n_b^1-l} \binom{n_b-n_b^1}{r-y-l} (p_2^b)^{r-y-l} \\
&(1-p_2^b)^{n_b-n_b^1-r+y+l} c_1(r, y, j, i)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

A partir de 4.34 e 4.35, é possível verificar que a transição do estado i para $i-1$ está sendo considerada. Isto pode ser observado se o valor de r for substituído por zero. Neste caso, as expressões de π_{ii-1} obtidas para $i \leq B_L$ e $i > B_L$ são, respectivamente, $(1-p_1^a)^{n_a^1} (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1} (1-p_1^b)^{n_b^1} (1-p_2^b)^{n_b-n_b^1}$ e $(1-p_1^a)^{n_a^1} (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1}$.

O algoritmo para $c_1(r, y, j, i)$ também pode ser visto na seção 4.3

4.5 Sistema GEOM/GEOM/1/ B_H com prioridades de descarte e chegadas em grupo

Neste sistema, é analisado um caso análogo ao especificado na seção 4.3, mas considerando que o tempo de serviço dos usuários possui uma distribuição geométrica com parâmetro β . Em relação às características da Cadeia de Markov, considera-se um sistema que comporta, no máximo, B_H unidades de informação e os usuários de baixa prioridade podem ser aceitos juntamente com os de alta prioridade até um tamanho B_L . Quando o espaço utilizado no sistema exceder B_L , somente os usuários de alta prioridade são admitidos enquanto houver espaço disponível para armazenamento. É importante mencionar que os parâmetros utilizados para descrever este sistema foram definidos na subseção 4.3.2.

4.5.1 Características do sistema

Intervalos entre chegadas

Sejam A_n^a e A_n^b as variáveis aleatórias que representam os números de usuários gerados no n -ésimo segmento de tempo por cada fonte de alta e baixa prioridade, respectivamente. Dado que as fontes referentes a cada prioridade de descarte seguem uma variável aleatória de Bernoulli, tem-se:

$$P(A_n^a = 0) = 1 - p_a$$

$$P(A_n^a = 1) = p_a$$

$$P(A_n^b = 0) = 1 - p_b$$

$$P(A_n^b = 1) = p_b$$

onde,

p_a = probabilidade de uma fonte de alta prioridade gerar um usuário;

p_b = probabilidade de uma fonte de baixa prioridade gerar um usuário;

Definindo-se T_n^a e T_n^b como variáveis aleatórias que especificam os intervalos de chegada dos usuários n e $n + 1$ de alta e baixa prioridade, respectivamente, encontra-se a seguinte distribuição geométrica para T_n^a e T_n^b :

$$P(T_n^a = k) = (1 - p_a)^{k-1} p_a; (k \geq 1)$$

$$P(T_n^b = k) = (1 - p_b)^{k-1} p_b; (k \geq 1)$$

Intervalos de serviço

Seja B_n a variável aleatória que representa o número de usuários saindo do sistema no n -ésimo segmento. Desta forma, como o término do serviço dos usuários segue uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro β , tem-se:

$$P(B_n = 0) = 1 - \beta$$

$$P(B_n = 1) = \beta$$

Definindo-se S_n como a variável aleatória que representa o tamanho do intervalo entre as saídas dos usuários n e $n + 1$, encontra-se a seguinte distribuição geométrica para S_n :

$$P(S_n = k) = (1 - \beta)^{k-1} \beta; (k \geq 1)$$

4.5.2 Modelagem Analítica

Assim como nos sistemas GEOM/D/1/ B_H e MMBP/D/1/ B_H , considera-se π_{ij} como a probabilidade de haver a transição da variável de estado do valor i para j . A partir desta informação, as mesmas situações encontradas nas seções 4.3 e 4.4 são analisadas, ou seja:

1. Os estados i e j são menores que B_L ;
2. Os estados i e j são maiores que B_L e menores que B_H ;
3. O estado i possui qualquer valor menor o igual a B_H e j é igual a B_H ;
4. O estado i é menor ou igual a B_L mas o estado j é maior ou igual a B_L e menor que B_H .

Desta forma, considerando processos de Bernoulli para descrever, em um segmento de tempo, o funcionamento das fontes e o término do serviço do usuário em atendimento, encontra-se as seguintes expressões para os casos 1, 2, 3 e 4, respectivamente:

1. • para $j \geq i$ e $i > 0$

$$\begin{aligned} \pi_{ij} = & \left(\sum_{y=0}^{j-i+1} \binom{n_a}{y} p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \binom{n_b}{j-i+1-y} p_b^{j-i+1-y} \right. \\ & (1-p_b)^{n_b-j+i-1+y} \beta + \left. \left(\sum_{y=0}^{j-i} \binom{n_a}{y} p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \right. \right. \\ & \left. \left. \binom{n_b}{j-i-y} p_b^{j-i-y} (1-p_b)^{n_b-j+i+y} \right) (1-\beta) \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

- para $j \geq i$ e $i = 0$

$$\begin{aligned} \pi_{0j} = & \sum_{y=0}^j \binom{n_a}{y} p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \binom{n_b}{j-y} p_b^{j-y} \\ & (1-p_b)^{n_b-j+y} \end{aligned} \quad (4.40)$$

- para $j = i - 1$

$$\pi_{ij} = (1-p_a)^{n_a} (1-p_b)^{n_b} \beta \quad (4.41)$$

2. • para $j \geq i$

$$\pi_{ij} = \left(\binom{n_a}{j-i+1} p_a^{j-i+1} (1-p_a)^{n_a-j+i-1} \right) \beta + \left(\binom{n_a}{j-i} p_a^{j-i} (1-p_a)^{n_a-j+i} \right) (1-\beta) \quad (4.42)$$

- para $j = i - 1$

$$\pi_{ij} = (1-p_a)^{n_a} \beta \quad (4.43)$$

3.
$$\pi_{iB_H} = 1 - \sum_{j=0}^{B_H-1} \pi_{ij} \quad (4.44)$$

4. • Para $i > 0$

$$\begin{aligned} \pi_{ij} = & \left(\sum_{r=j-i+1}^{n_b+j-i+1} \sum_{y=j-B_L}^{j-i+1} \binom{n_a}{y} p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \binom{n_b}{r-y} \right. \\ & p_b^{r-y} (1-p_b)^{n_b-r+y} c_1^\beta(r, y, j, i) \Big) \beta + \left(\sum_{r=j-i}^{n_b+j-i} \sum_{y=j-B_L}^{j-i} \binom{n_a}{y} \right. \\ & p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \binom{n_b}{r-y} p_b^{r-y} (1-p_b)^{n_b-r+y} c_1^{1-\beta}(r, y, j, i) \Big) \\ & (1-\beta) \end{aligned} \quad (4.45)$$

- Para $i = 0$

$$\begin{aligned} \pi_{0j} = & \sum_{r=j}^{n_b+j} \sum_{y=j-B_L}^j \binom{n_a}{y} p_a^y (1-p_a)^{n_a-y} \binom{n_b}{r-y} \\ & p_b^{r-y} (1-p_b)^{n_b-r+y} c_1(r, y, j, 0) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Como pode ser observado, as equações de 4.39 a 4.46, são obtidas através de uma analogia com os resultados relativos ao sistema GEOM/D/1/ B_H . Na equação 4.45, os valores $c_1^\beta(r, y, j, i)$ e $c_1^{1-\beta}(r, y, j, i)$ representam as probabilidades de haver uma transição do estado i para j dado que parte da quantidade de usuários de baixa prioridade é admitida e o restante é descartado. Neste caso, enquanto a primeira função considera o término do serviço de uma unidade de informação no segmento de tempo analisado, a segunda não permite que esta característica ocorra. Apesar do algoritmo para $c_1^\beta(r, y, j, i)$ ser idêntico ao relacionado à $c_1(r, y, j, i)$ (definido na seção 4.3), o resultado para $c_1^{1-\beta}(r, y, j, i)$ pode ser visto abaixo:

- Caso $r = y = j - i$

$$\implies c_1^{1-\beta}(r, y, j, i) = 1 \quad (4.47)$$

- Caso $r > j - i$ e $j - i - y > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_1^{1-\beta}(r, y, j, i) &= \binom{r-y}{r-j+i} \prod_{t=0}^{r-j+i-1} \left(\frac{r-B_L+i-t}{r-t} \right) \\ &\quad \prod_{t=0}^{j-i-y-1} \left(\frac{B_L-i-t}{j-i-t} \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

- Caso $r > j - i$ e $j - i - y = 0$

$$\Rightarrow c_1^{1-\beta}(r, y, j, i) = \prod_{t=0}^{r-j+i-1} \left(\frac{r-B_L+i-t}{r-t} \right) \quad (4.49)$$

- Caso $y \neq r = j$

$$\Rightarrow c_1^{1-\beta}(r, y, j, i) = \prod_{t=0}^{j-i-y-1} \left(\frac{B_L-i-t}{j-i-t} \right) \quad (4.50)$$

Através da apresentação das probabilidades π_{ij} e suas respectivas explicações, finaliza-se a definição da Cadeia de Markov. É importante mencionar que o estado estacionário do sistema é obtido pelo método descrito no apêndice A.

4.6 Sistema MMBP/GEOM/1/ B_H com prioridades de descarte e chegadas em grupo

Neste sistema, é analisado um caso análogo ao especificado na seção 4.4, mas considerando que o tempo de serviço dos usuários possui uma distribuição geométrica com parâmetro β . Em relação às características da Cadeia de Markov, considera-se um sistema que comporta, no máximo, B_H unidades de informação e os usuários de baixa prioridade podem ser aceitos juntamente com os de alta prioridade até um tamanho B_L . Quando o espaço utilizado no sistema exceder B_L , somente os usuários de alta prioridade são admitidos enquanto houver espaço disponível para armazenamento.

4.6.1 Características do sistema

Intervalos entre chegadas

Devido ao funcionamento das fontes MMBP (*Marvov Modulated Bernoulli Process*), desenvolve-se expressões diferentes relacionadas à emissão e ao intervalo entre a chegada de usuários para cada estado em que as fontes operam. Desta forma, tem-se as seguintes definições:

- Para fontes operando no estado E_1 :

Sejam $A1_n^a$ e $A1_n^b$ as variáveis aleatórias que representam os números de usuários gerados no n -ésimo segmento de tempo por cada fonte de alta e baixa prioridade no estado E_1 , respectivamente. Dado que as fontes associadas a cada prioridade de descarte seguem uma variável aleatória de Bernoulli, tem-se:

$$P(A1_n^a = 0) = 1 - p_1^a$$

$$P(A1_n^a = 1) = p_1^a$$

$$P(A1_n^b = 0) = 1 - p_1^b$$

$$P(A1_n^b = 1) = p_1^b$$

onde,

p_1^a = probabilidade de uma fonte de alta prioridade no estado E_1 gerar um usuário;

p_1^b = probabilidade de uma fonte de baixa prioridade no estado E_1 gerar um usuário;

Definindo-se $T1_n^a$ e $T1_n^b$ como as variáveis aleatórias que especificam os intervalos de chegada dos usuários n e $n + 1$ de alta e baixa prioridade no estado E_1 , respectivamente, encontra-se a seguinte distribuição geométrica para $T1_n^a$ e $T1_n^b$:

$$P(T1_n^a = k) = (1 - p_1^a)^{k-1} p_1^a; (k \geq 1)$$

$$P(T1_n^b = k) = (1 - p_1^b)^{k-1} p_1^b; (k \geq 1)$$

- Para fontes operando no estado E_2 :

Sejam $A2_n^a$ e $A2_n^b$ as variáveis aleatórias que representam os números de usuários gerados no n -ésimo segmento de tempo por cada fonte de alta e baixa prioridade no estado E_2 , respectivamente. Dado que as fontes associadas a cada prioridade de descarte seguem uma variável aleatória de Bernoulli, tem-se:

$$P(A2_n^a = 0) = 1 - p_2^a$$

$$P(A2_n^a = 1) = p_2^a$$

$$P(A2_n^b = 0) = 1 - p_2^b$$

$$P(A2_n^b = 1) = p_2^b$$

onde,

p_2^a = probabilidade de uma fonte de alta prioridade no estado E_2 gerar um usuário;

p_2^b = probabilidade de uma fonte de baixa prioridade no estado E_2 gerar um usuário;

Definindo-se $T2_n^a$ e $T2_n^b$ como as variáveis aleatórias que especificam os intervalos de chegada dos usuários n e $n + 1$ de alta e baixa prioridade no estado E_2 , respectivamente, encontra-se a seguinte distribuição geométrica para $T2_n^a$ e $T2_n^b$:

$$P(T2_n^a = k) = (1 - p_2^a)^{k-1} p_2^a; (k \geq 1)$$

$$P(T2_n^b = k) = (1 - p_2^b)^{k-1} p_2^b; (k \geq 1)$$

Intervalos de serviço

Através da notação de Kendall, verifica-se que o tamanho das unidades de informação que chegam no sistema é constante. Portanto, sempre que o sistema não estiver vazio, considera-se que ocorre o término do serviço de 1 usuário após cada segmento de tempo. Esta característica determina o “esvaziamento” da fila. Desta forma, tem-se a seguinte definição:

Seja S_n a variável aleatória que representa o tamanho do intervalo entre a saída dos usuários n e $n + 1$ do sistema. Dado que o sistema não esteja vazio, tem-se a seguinte distribuição:

$$P(S_n = 1) = 1$$

$$P(S_n = k) = 0$$

$$(k \neq 1)$$

4.6.2 Definições dos parâmetros utilizados

Para obter os resultados desejados, foi necessária a utilização de vários parâmetros. Portanto, além dos parâmetros apresentados na subseção 4.3.2, considera-se os seguintes valores:

n_a^1 = número de fontes de alta prioridade no estado E_1 ;

n_b^1 = número de fontes de baixa prioridade no estado E_1 ;

p_{12} = probabilidade da fonte MMBP passar do estado E_1 para o estado E_2 ;

p_{21} = probabilidade da fonte MMBP passar do estado E_2 para o estado E_1 ;

4.6.3 Modelagem Analítica

Neste ponto, considera-se π_{ij} como a probabilidade de haver a transição da variável de estado do valor i para j . A partir desta informação, as seguintes situações são analisadas:

1. Os estados i e j são menores que B_L ;
2. Os estados i e j são maiores que B_L e menores que B_H ;
3. O estado i possui qualquer valor menor o igual a B_H e j é igual a B_H ;
4. O estado i é menor ou igual a B_L mas o estado j é maior ou igual a B_L e menor que B_H .

Desta forma, considerando fontes MMBP, encontra-se as seguintes expressões para os casos 1, 2, 3 e 4, respectivamente:

1. • para $j \geq i$ e $i > 0$

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}^{n_a^1 n_b^1} &= \left(\sum_{y=0}^{j-i+1} \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a-n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} \right. \\
&\quad \left. (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-y-k} \sum_{l=0}^{j-i+1-y} \binom{n_b^1}{l} (p_1^b)^l (1-p_1^b)^{n_b^1-l} \right. \\
&\quad \left. \binom{n_b-n_b^1}{j-i+1-y-l} (p_2^b)^{j-i+1-y-l} (1-p_2^b)^{n_b-n_b^1-j+i-1+y+l} \right) \beta \\
&+ \left(\sum_{y=0}^{j-i} \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a-n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} \right. \\
&\quad \left. (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-y-k} \sum_{l=0}^{j-i+1-y} \binom{n_b^1}{l} (p_1^b)^l (1-p_1^b)^{n_b^1-l} \right. \\
&\quad \left. \binom{n_b-n_b^1}{j-i-y-l} (p_2^b)^{j-i+1-y-l} (1-p_2^b)^{n_b-n_b^1-j+i+y+l} \right) (1-\beta)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

- para $j \geq i$ e $i = 0$

$$\begin{aligned}
\pi_{0j}^{n_a^1 n_b^1} &= \sum_{y=0}^j \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a-n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} \\
&\quad (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-y-k} \sum_{l=0}^{r-y} \binom{n_b^1}{l} (p_1^b)^l (1-p_1^b)^{n_b^1-l} \\
&\quad \binom{n_b-n_b^1}{j-y-l} (p_2^b)^{j-y-l} (1-p_2^b)^{n_b-n_b^1-j+y+l}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

- para $j = i - 1$

$$\pi_{ij} = (1-p_1^a)^{n_a^1} (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1} (1-p_1^b)^{n_b^1} (1-p_2^b)^{n_b-n_b^1} \beta \tag{4.53}$$

2. • para $j \geq i$

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}^{n_a^1 n_b^1} &= \left(\sum_{k=0}^{j-i+1} \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a-n_a^1}{j-i+1-k} (p_2^a)^{j-i+1-k} \right. \\
&\quad \left. (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-j+i-1+k} \right) \beta + \left(\sum_{k=0}^{j-i} \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \right. \\
&\quad \left. \binom{n_a-n_a^1}{j-i-k} (p_2^a)^{j-i-k} (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-j+i+k} \right) (1-\beta)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

- para $j = i - 1$

$$\pi_{ij} = (1-p_1^a)^{n_a^1} (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1} \beta \tag{4.55}$$

$$3. \quad \pi_{iB_H} = 1 - \sum_{j=0}^{B_H-1} \pi_{ij} \quad (4.56)$$

4. • Para $i > 0$

$$\begin{aligned} \pi_{ij}^{n_a^1 n_b^1} &= \left(\sum_{r=j-i+1}^{n_b+j-i+1} \sum_{y=j-B_L}^{j-i+1} \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a-n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} \right. \\ &\quad (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-y+k} \sum_{l=0}^{r-y} \binom{n_b^1}{l} (p_1^b)^l (1-p_1^b)^{n_b^1-l} \binom{n_b-n_b^1}{r-y-l} (p_2^b)^{r-y-l} \\ &\quad \left. (1-p_2^b)^{n_b-n_b^1-r+y+l} c_1^\beta(r, y, j, i) \right) \beta + \\ &\quad \left(\sum_{r=j-i}^{n_b+j-i} \sum_{y=j-B_L}^{j-i} \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a-n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} \right. \\ &\quad (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-y+k} \sum_{l=0}^{r-y} \binom{n_b^1}{l} (p_1^b)^l (1-p_1^b)^{n_b^1-l} \binom{n_b-n_b^1}{r-y-l} (p_2^b)^{r-y-l} \\ &\quad \left. (1-p_2^b)^{n_b-n_b^1-r+y+l} c_1^{1-\beta}(r, y, j, i) \right) (1-\beta) \end{aligned} \quad (4.57)$$

• Para $i = 0$

$$\begin{aligned} \pi_{0j}^{n_a^1 n_b^1} &= \sum_{r=j}^{n_b+j} \sum_{y=j-B_L}^j \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a-n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} \\ &\quad (1-p_2^a)^{n_a-n_a^1-y+k} \sum_{l=0}^{r-y} \binom{n_b^1}{l} (p_1^b)^l (1-p_1^b)^{n_b^1-l} \binom{n_b-n_b^1}{r-y-l} (p_2^b)^{r-y-l} \\ &\quad (1-p_2^b)^{n_b-n_b^1-r+y+l} c_1(r, y, j, 0) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Como pode ser observado, as equações de 4.51 a 4.58, são obtidas através de uma analogia com os resultados relativos ao sistema MMBP/D/1/ B_H . Na equação 4.57, os valores $c_1^\beta(r, y, j, i)$ e $c_1^{1-\beta}(r, y, j, i)$ representam as probabilidades de haver uma transição do estado i para j dado que parte da quantidade de usuários de baixa prioridade é admitida e o restante é descartado. Neste caso, enquanto a primeira função considera o término do serviço de uma unidade de informação, a segunda não permite que esta característica ocorra. Apesar do algoritmo para $c_1^\beta(r, y, j, i)$ ser idêntico ao relacionado à $c_1(r, y, j, i)$ (definido na seção 4.3), o resultado para $c_1^{1-\beta}(r, y, j, i)$ foi definido na seção 4.5.

4.7 Obtenção das expressões para probabilidade de perda dos usuários de alta e baixa prioridade

Nesta seção, os valores referentes à probabilidade de perda dos tráfegos envolvidos serão caracterizados a partir das fontes e da Cadeia de Markov. Os conceitos utilizados são similares aos encontrados nas equações 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14. Neste ponto, utiliza-se a idéia envolvendo a probabilidade de uma unidade de informação teste ser perdida ao tentar entrar no sistema [38].

Assim como na definição dos sistemas de fila estudados, será realizada uma análise evolutiva, ou seja, inicialmente serão desenvolvidas expressões com características mais simples e, em seguida, serão abordados casos mais complexos. Desta forma, a obtenção dos valores de probabilidade de perda será dividida em dois casos:

- sistemas com tempo de serviço determinístico;
- sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço.

Em cada um destes casos, serão inicialmente desenvolvidas as expressões referentes aos usuários de baixa prioridade e, em seguida, aos de alta prioridade.

4.7.1 Sistemas com tempo de serviço determinístico

No caso da probabilidade de perda do fluxo de baixa prioridade, utiliza-se os seguintes conceitos:

1. Todos os usuários de baixa prioridade que, quando chegam ao sistema, encontram mais de B_L unidades de informações armazenadas são descartados. Desta forma, conclui-se que a parcela $\sum_{i=B_L+1}^{B_H} X(i)$ faz parte da expressão procurada;
2. Dado que o número de usuários no sistema é menor ou igual a B_L , existe a possibilidade dos usuários de baixa prioridade serem aceitos ou descartados de acordo com o tamanho do grupo de entrada.

A fim de obter os componentes utilizados na probabilidade de perda associada ao item 2, alguns fatores devem ser considerados. É muito natural perceber a necessidade de aplicar a distribuição de probabilidade do número de unidades de informação

armazenadas, ou seja, $X(i)$. Este fato ocorre, pois, quanto menor a ocupação da fila, mais remota a possibilidade do usuário teste, que chega ao sistema, ser descartado.

Os outros fatores a serem considerados são: as quantidades de unidades de informação de alta e baixa prioridade geradas no mesmo segmento de tempo e a probabilidade do usuário teste ser perdido dado que a ocupação inicial da fila (i) e a quantidade de tráfego de entrada são definidos. Enquanto no primeiro caso utiliza-se os componentes a_y^a e a_z^b , no segundo considera-se as situações em que o sistema está inicialmente vazio ($i = 0$) ou ocupado ($i > 0$). Desta forma, obtém-se os termos $\frac{z+y-B_L}{z+y}$ e $\frac{i+z+y-B_L-1}{z+y}$.

Através de uma análise, verifica-se que a probabilidade de perda do usuário teste quando $i = 0$ deve ser considerada somente se a condição $B_L - (n_a + n_b) < 0$ for satisfeita. Desta forma, a união dos fatores associados aos conceito dos itens 1 e 2 é representada pelo seguinte algoritmo:

- Se $B_L - (n_a + n_b) \geq 0$:

$$P_{perda_{bp}} = \sum_{i=B_L-(n_a+n_b)+2}^{B_L} \sum_{y=\max(0, B_L-i-n_b+2)}^{n_a} \sum_{z=\max(1, B_L-i-y+2)}^{n_b} (X(i) a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \left(\frac{i+z+y-B_L-1}{z+y} \right)) + \sum_{i=B_L+1}^{B_H} X(i) \quad (4.59)$$

- Se $B_L - (n_a + n_b) < 0$:

$$P_{perda_{bp}} = \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=\max(0, B_L-i-n_b+2)}^{n_a} \sum_{z=\max(1, B_L-i-y+2)}^{n_b} (X(i) a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \left(\frac{i+z+y-B_L-1}{z+y} \right)) + \sum_{i=B_L+1}^{B_H} X(i) + \sum_{y=\max(0, B_L-n_b+1)}^{n_a} \sum_{z=\max(1, B_L-y+1)}^{n_b} \left(X(0) \left(\frac{z+y-B_L}{z+y} \right) a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \right) \quad (4.60)$$

Como pode ser observado, a equação 4.60 refere-se ao resultado em 4.59 acrescido do termo $\sum_{y=\max(0, B_L-n_b+1)}^{n_a} \sum_{z=\max(1, B_L-y+1)}^{n_b} \left(X(0) \left(\frac{z+y-B_L}{z+y} \right) a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \right)$. Este valor está associado à probabilidade de perda da unidade de informação teste quando o sistema está inicialmente vazio.

Neste algoritmo, o termo $\frac{z a^b}{E A r^b}$ representa a probabilidade do usuário teste estar incluído em um grupo de tamanho z ao chegar [38]. Através de uma análise, verifica-se que o numerador da fração representa o número de posições possíveis para ocupação deste usuário multiplicado pela possibilidade deste número ocorrer. Como $E A r^b$ é a quantidade média de tráfego de baixa prioridade que chega em um segmento de tempo e o numerador é um dos elementos que compõem esta média, a divisão destes dois termos fornece o valor procurado.

É importante destacar a obtenção dos três intervalos das variáveis utilizadas na primeira parcela das expressões 4.59 e 4.60. Estes termos são análogos e representam o caso em que o sistema não está vazio antes da chegada de tráfego. No caso da variável i , verifica-se, em 4.59, que é possível haver a perda do usuário teste a partir do estado $B_L - (n_a + n_b) + 2$ até B_L . O primeiro valor representa a quantidade de usuários armazenados no sistema que possibilita a perda de somente uma unidade de informação de baixa prioridade quando todas as fontes existentes geram tráfego. No caso da equação 4.60, esta expressão é substituída por 1, pois considera-se um sistema inicialmente ocupado e $B_L - (n_a + n_b) < 0$. O segundo valor referencia a ocupação do sistema que antecede a faixa onde todo o fluxo de baixa prioridade é perdido.

No caso da variável y , que referencia o número de usuários de alta prioridade no tráfego gerado pelas fontes, analisa-se situações extremas, onde ocorre o menor ou maior fluxo de unidades de informação deste tipo associado à perda do usuário teste. Através de uma análise, verifica-se que a situação associada ao valor mínimo de y ocorre quando todo o fluxo admitido é armazenado em posições abaixo do limite B_L e somente um usuário de baixa prioridade é perdido, dado que todas as fontes de baixa prioridade geram uma unidade de informação. Desta forma, encontra-se a expressão $\max(0, B_L - i - n_b + 2)$, onde o operador \max (maior valor) considera a possibilidade do valor $B_L - i - n_b + 2$ ser menor que zero. O número máximo de usuários de alta prioridade que pode chegar no sistema é igual à quantidade de fontes existentes.

Em relação à variável z , que referencia o número de usuários de baixa prioridade existente no tráfego de entrada, realiza-se uma análise análoga à utilizada para a variável y . A fim de obter o menor valor deste fluxo, considera-se que todo o tráfego de alta prioridade é aceito em posições inferiores à B_L e somente o espaço restante, que é somado à posição do usuário a ser descartado, pode armazenar o fluxo de baixa

prioridade. Desta forma, obtém-se $\max(1, B_L - i - y + 2)$, onde a necessidade de chegar pelo menos um usuário de baixa prioridade é enfatizada. O número máximo de usuários de baixa prioridade que pode chegar no sistema é igual à quantidade de fontes existentes.

Para obter a perda dos usuários de alta prioridade, analisa-se dois casos distintos: o primeiro considerando um número de unidades de informação armazenadas no sistema menor ou igual a B_L ($i \leq B_L$) e o segundo com este valor maior que B_L ($i > B_L$). Em ambos os casos, serão obtidas equações distintas, representando a probabilidade de perda de um usuário teste de alta prioridade que chega ao sistema. Após a definição destas expressões, ocorrerá a união destas duas estruturas em um algoritmo englobando as duas situações apresentadas.

Ao considerar a variável i menor ou igual a B_L verifica-se a possibilidade dos tráfegos de alta e baixa prioridade gerados proporcionarem a perda do usuário teste de alta prioridade. A partir deste conceito, as funções $c_2(k, z, y, i)$ e $c_3(k, z, y, i)$ são utilizadas para obter a probabilidade de k unidades de informação de baixa prioridade serem admitidas a partir do tráfego produzido pelas fontes. Neste caso, enquanto $c_2(k, z, y, i)$ considera o término do atendimento de um usuário pelo servidor antes da chegada de tráfego, o termo $c_3(k, z, y, i)$ não permite que esta característica ocorra.

De forma análoga às equações 4.59 e 4.60, a condição $B_H - (n_a + n_b) < 0$ determina a possibilidade de um usuário de alta prioridade ser perdido quando o sistema está inicialmente vazio ($i = 0$). A partir destes dados, tem-se o seguinte algoritmo para $i \leq B_L$:

- Se $B_H - (n_a + n_b) \geq 0$:

$$P_{perda_{ap}(i \leq B_L)} = \sum_{i=B_H-(n_a+n_b)+2}^{B_L} \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-i-y+2)}^{\min(n_b, B_L-i+1)} \left(X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \left(\frac{i+k+y-B_H-1}{y} \right) \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_2(k, z, y, i) \right) \quad (4.61)$$

- Se $B_H - (n_a + n_b) < 0$:

$$P_{perda_{ap}(i \leq B_L)} = \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-i-y+2)}^{\min(n_b, B_L-i+1)} \left(X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{i+k+y-B_H-1}{y} \right) \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_2(k, z, y, i) \\
& + \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-y+1)}^{\min(n_b, B_L)} \left(X(0) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\
& \left. \left(\frac{k+y-B_H}{y} \right) \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_3(k, z, y, 0) \right) \tag{4.62}
\end{aligned}$$

A função $c_2(k, z, y, i)$ é definida de forma análoga à $c_1(r, y, j, i)$, ou seja:

- Caso $z = k = 0$

$$\implies c_2(k, z, y, i) = 1 \tag{4.63}$$

- Caso $k > 0$ e $z > k$

$$\begin{aligned}
\implies c_2(k, z, y, i) = \binom{z}{z-k} \prod_{t=0}^{z-k-1} \left(\frac{z+y-B_L+i-1-t}{z+y-t} \right) \\
\prod_{t=0}^{k-1} \left(\frac{B_L-i+1-t}{k+y-t} \right) \tag{4.64}
\end{aligned}$$

- Caso $z > 0$ e $k = 0$

$$\implies c_2(k, z, y, i) = \prod_{t=0}^{z-1} \left(\frac{z+y-B_L+i-1-t}{z+y-t} \right) \tag{4.65}$$

- Caso $k > 0$ e $k = z$

$$\implies c_2(k, z, y, i) = \prod_{t=0}^{k-1} \left(\frac{B_L-i+1-t}{k+y-t} \right) \tag{4.66}$$

A partir desta estrutura, tem-se o seguinte resultado para $c_3(k, z, y, i)$:

- Caso $z = k = 0$

$$\implies c_3(k, z, y, i) = 1 \tag{4.67}$$

- Caso $k > 0$ e $z > k$

$$\begin{aligned}
\implies c_3(k, z, y, i) = \binom{z}{z-k} \prod_{t=0}^{z-k-1} \left(\frac{z+y-B_L+i-t}{z+y-t} \right) \\
\prod_{t=0}^{k-1} \left(\frac{B_L-i-t}{k+y-t} \right) \tag{4.68}
\end{aligned}$$

- Caso $z > 0$ e $k = 0$

$$\implies c_3(k, z, y, i) = \prod_{t=0}^{z-1} \left(\frac{z + y - B_L + i - t}{z + y - t} \right) \quad (4.69)$$

- Caso $k > 0$ e $k = z$

$$\implies c_3(k, z, y, i) = \prod_{t=0}^{k-1} \left(\frac{B_L - i - t}{k + y - t} \right) \quad (4.70)$$

A definição das expressões 4.61 e 4.62 segue o mesmo padrão utilizado para obter a probabilidade de perda dos usuários de baixa prioridade. Desta forma, os termos $\frac{k+y-B_H}{k+y}$ e $\frac{i+k+y-B_H-1}{k+y}$ representam, respectivamente, as probabilidades do usuário teste ser perdido dado que o sistema está inicialmente vazio ($i = 0$) ou ocupado ($i > 0$). Assim como na expressões 4.59 e 4.60, utiliza-se $\frac{y a_y^a}{E A r^a}$ para representar a probabilidade do usuário teste estar incluído em um grupo de tamanho y .

O termo $\sum_{z=k}^{n_b} a_z^b$ é aplicado pois, neste caso, utiliza-se o número de usuários de baixa prioridade aceitos para obter a probabilidade de perda procurada. Portanto, a quantidade de unidades de informação de baixa prioridade que chega no sistema (variável z) varia do valor k (quantidade aceita) até o número máximo de fontes que podem produzir, ou seja, n_b .

Os limites dos outros somatórios são obtidos de forma similar às equações 4.59 e 4.60. Apesar dos intervalos relativo à variável i serem análogos aos encontrados nestas expressões, os intervalos da variável y foram modificados para referenciar a menor e maior quantidade de usuários de alta prioridade gerada para ocorrer a perda do usuário teste. Os limites associados à variável k representam os valores máximo e mínimo de tráfego de baixa prioridade que pode ser admitido no sistema.

A fim de obter os intervalos dos somatórios, deve-se considerar situações distintas. No caso da variável y , o valor $B_H - B_L + 1$ está relacionado com o fato das posições do sistema entre $B_L + 1$ e B_H serem preenchidas somente com tráfego de alta prioridade. Como pode ser facilmente observado, o número máximo de usuários de alta prioridade que podem entrar no sistema é igual à n_a .

No caso da variável k , o valor $\max(0, B_H - i - y + 2)$ referencia o número de posições restantes que podem ser ocupadas pelo tráfego de baixa prioridade uma vez que o valor da variável y foi definido. O limite $\min(n_b, B_L - i + 1)$ está associado ao maior espaço entre o estado i e a posição B_L que pode ser preenchido por este tipo de tráfego. É importante observar na equação 4.62 que, quando o sistema está

inicialmente vazio ($i = 0$), estes valores são substituídos por $\max(0, B_H - y + 1)$ e $\min(n_b, B_L)$, respectivamente. Desta forma, os intervalos de todas as variáveis foram bem definidos.

Ao considerar a variável i maior que B_L , observa-se uma situação mais simples, onde existe a admissão somente do tráfego de alta prioridade. Neste caso, obtém-se:

$$P_{perda_{ap}(i > B_L)} = \sum_{i=\max(B_L+1, B_H-n_a+2)}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+2}^{n_a} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \quad (4.71)$$

O intervalo aplicado à variável i abrange o menor e o maior número de usuários armazenados no sistema para que haja a perda do usuário teste dentro da faixa $B_L < i \leq B_H$. Uma vez que o estado do sistema esteja definido, obtém-se o intervalo para o número de usuários de alta prioridade gerado pelas fontes. Desta forma, os valores que as variáveis desta equação podem assumir foram bem definidos.

Uma vez que as expressões para $P_{perda_{ap}(i \leq B_L)}$ e $P_{perda_{ap}(i > B_L)}$ foram especificadas, é possível desenvolver o algoritmo para obter a probabilidade de perda dos usuários de alta prioridade para qualquer ocupação inicial do sistema (i). Para executar esta tarefa, é necessário considerar o número de fontes que geram o tráfego analisado, ou seja, n_a . Como o espaço entre os limites B_L e B_H somente pode ser ocupado por usuários de alta prioridade, conclui-se que se n_a for menor que $B_H - B_L + 1$ não é possível haver a perda de usuários deste tipo quando $i \leq B_L$. Através desta informação, encontra-se o seguinte algoritmo:

- Caso $n_a < B_H - B_L + 1$:

$$P_{perda_{ap}} = \sum_{i=\max(B_L+1, B_H-n_a+2)}^{B_H} \sum_{y=(B_H-i+2)}^{n_a} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \quad (4.72)$$

- Caso $n_a \geq B_H - B_L + 1$:

Se $B_H - (n_a + n_b) \geq 0$:

$$P_{perda_{ap}} = \sum_{i=B_H-(n_a+n_b)+2}^{B_L} \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-i-y+2)}^{\min(n_b, B_L-i+1)} \left(X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right)$$

$$\left(\frac{i+k+y-B_H-1}{y} \right) \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_2(k, z, y, i) + \sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+2}^{n_a} \left(X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \right) \quad (4.73)$$

Se $B_H - (n_a + n_b) < 0$:

$$\begin{aligned} P_{perda_{ap}} = & \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-i-y+2)}^{\min(n_b, B_L-i+1)} \left(X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\ & \left. \left(\frac{i+k+y-B_H-1}{y} \right) \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_2(k, z, y, i) \right) + \\ & \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-y+1)}^{\min(n_b, B_L)} \left(X(0) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \left(\frac{k+y-B_H}{y} \right) \right. \\ & \left. \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_3(k, z, y, 0) \right) + \sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+2}^{n_a} \left(X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\ & \left. \left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Pode-se observar que o algoritmo acima combina as equações 4.61, 4.62 e 4.71.

4.7.2 Sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço

Nesta subseção, os valores relacionados à probabilidade de perda dos tráfegos envolvidos serão caracterizados a partir de uma distribuição geométrica com parâmetro β para o tempo de serviço dos usuários. Os resultados são análogos aos definidos na subseção 4.7.1. Desta forma, os seguintes algoritmos são obtidos:

Para os usuários de baixa prioridade

- Se $B_L - (n_a + n_b) \geq 0$:

$$\begin{aligned} P_{perda_{bp}} = & \left(\sum_{i=B_L-(n_a+n_b)+2}^{B_L} \sum_{y=\max(0, B_L-i-n_b+2)}^{n_a} \sum_{z=\max(1, B_L-i-y+2)}^{n_b} X(i) \right. \\ & \left. a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \left(\frac{i+z+y-B_L-1}{z+y} \right) \right) \beta + \\ & \left(\sum_{i=B_L-(n_a+n_b)+1}^{B_L} \sum_{y=\max(0, B_L-i-n_b+1)}^{n_a} \sum_{z=\max(1, B_L-i-y+1)}^{n_b} X(i) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \left(\frac{i + z + y - B_L}{z + y} \right) (1 - \beta) + \\
& \sum_{i=B_L+1}^{B_H} X(i)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

- Se $B_L - (n_a + n_b) < 0$:

$$\begin{aligned}
P_{perda_{bp}} &= \left(\sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=\max(0, B_L-i-n_b+2)}^{n_a} \sum_{z=\max(1, B_L-i-y+2)}^{n_b} X(i) \right. \\
& a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \left(\frac{i + z + y - B_L - 1}{z + y} \right) \left. \right) \beta + \\
& \left(\sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=\max(0, B_L-i-n_b+1)}^{n_a} \sum_{z=\max(1, B_L-i-y+1)}^{n_b} X(i) \right. \\
& a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \left(\frac{i + z + y - B_L}{z + y} \right) \left. \right) (1 - \beta) + \sum_{i=B_L+1}^{B_H} X(i) + \\
& \sum_{y=\max(0, B_L-n_b+1)}^{n_a} \sum_{z=\max(1, B_L-y+1)}^{n_b} \left(X(0) \left(\frac{z + y - B_L}{z + y} \right) a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \right)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Para os usuários de alta prioridade

- Caso $n_a < B_H - B_L + 1$:

$$\begin{aligned}
P_{perda_{ap}} &= \left(\sum_{i=\max(B_L+1, B_H-n_a+2)}^{B_H} \sum_{y=(B_H-i+2)}^{n_a} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\
& \left. \left(\frac{i + y - B_H - 1}{y} \right) \right) \beta + \left(\sum_{i=\max(B_L+1, B_H-n_a+1)}^{B_H} \sum_{y=(B_H-i+1)}^{n_a} X(i) \right. \\
& \left. \frac{y a_y^a}{E A r^a} \left(\frac{i + y - B_H}{y} \right) \right) (1 - \beta)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

- Caso $n_a \geq B_H - B_L + 1$:

Se $B_H - (n_a + n_b) \geq 0$:

$$\begin{aligned}
P_{perda_{ap}} &= \left(\sum_{i=B_H-(n_a+n_b)+2}^{B_L} \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-i-y+2)}^{\min(n_b, B_L-i+1)} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\
& \left. \left(\frac{i + k + y - B_H - 1}{y} \right) \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_2(k, z, y, i) \right) \beta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=B_H-(n_a+n_b)+1}^{B_L} \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-i-y+1)}^{\min(n_b, B_L-i)} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\
& \left. \left(\frac{i+k+y-B_H}{y} \right) \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_3(k, z, y, i) \right) (1-\beta) + \\
& \left(\sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+2}^{n_a} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \right) \beta + \\
& \left(\sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+1}^{n_a} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \left(\frac{i+y-B_H}{y} \right) \right) (1-\beta)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Se $B_H - (n_a + n_b) < 0$:

$$\begin{aligned}
P_{perda_{ap}} &= \left(\sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-i-y+2)}^{\min(n_b, B_L-i+1)} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\
& \left. \left(\frac{i+k+y-B_H-1}{y} \right) \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_2(k, z, y, i) \right) \beta + \\
& \left(\sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-i-y+1)}^{\min(n_b, B_L-i)} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\
& \left. \left(\frac{i+k+y-B_H}{y} \right) \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_2(k, z, y, i) \right) (1-\beta) + \\
& \sum_{y=B_H-B_L+1}^{n_a} \sum_{k=\max(0, B_H-y+1)}^{\min(n_b, B_L)} \left(X(0) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \left(\frac{k+y-B_H}{y} \right) \right. \\
& \left. \sum_{z=k}^{n_b} a_z^b c_3(k, z, y, 0) \right) + \left(\sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+2}^{n_a} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\
& \left. \left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \right) \beta + \left(\sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+1}^{n_a} X(i) \frac{y a_y^a}{E A r^a} \right. \\
& \left. \left(\frac{i+y-B_H}{y} \right) \right) (1-\beta)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Como pode ser observado, as funções $c_2(k, z, y, i)$ e $c_3(k, z, y, i)$ são utilizadas para obter a probabilidade de k unidades de informação de baixa prioridade serem admitidas a partir do tráfego produzido pelas fontes. Neste caso, enquanto $c_2(k, z, y, i)$ considera o término do atendimento de um usuário pelo servidor antes da chegada de tráfego, o termo $c_3(k, z, y, i)$ não permite que esta característica ocorra. Estas funções são especificadas na subseção 4.7.1.

Desta forma, conclui-se a obtenção das expressões para probabilidade de perda dos usuários de alta e baixa prioridade.

4.8 Obtenção das expressões de atraso para os usuários de alta e baixa prioridade

Assim como foi visto na obtenção da probabilidade de perda, os atrasos dos fluxos de alta e baixa prioridade serão calculados a partir da entrada de um usuário teste, pertencente ao tráfego analisado, e da sua interação com o sistema. Neste ponto, aplica-se os resultados da seção 4.7 para desenvolver as equações procuradas.

Apesar do teorema de Little [14] ser a abordagem mais direta para extrair o atraso das unidades de informação, o fato de existirem dois tráfegos distintos entrando na mesma fila acarreta na necessidade de obter um outro tipo de expressão. Desta forma, aplica-se a seguinte relação:

$$D = D_1 + D_2$$

Onde,

D_1 = tempo utilizado para atender todos os usuários existentes no sistema quando o grupo que contém o usuário teste chega;

D_2 = tempo que o usuário teste espera, dentro do grupo em que está incluído, para iniciar e terminar o seu serviço.

A partir desta relação e do conceito que a qualidade de serviço procurada representa a média do atraso obtido quando o usuário teste chega no sistema e não é descartado, encontra-se a seguinte expressão geral:

$$\begin{aligned} \text{Atraso} &= \sum_i (\overline{D_1 + D_2}) P(X = i \cap \text{tamanho do grupo} = z + y | \text{usuário teste} \\ &\quad \text{não é perdido}) \\ &= \sum_i (\overline{D_1 + D_2}) \frac{P(X = i \cap \text{tam. do grupo} = z + y \cap \text{us. teste ã é perdido})}{P(\text{us. teste ã é perdido})} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Em 4.80 considera-se que o termo $\overline{D_1 + D_2}$ representa o atraso médio de qualquer unidade de informação admitida no sistema. Neste caso, o intervalo para a variável i não é especificado pois está relacionado à expressão analisada.

Assim como na definição da probabilidade de perda, será realizada uma análise evolutiva, ou seja, inicialmente serão desenvolvidas expressões com características mais simples e, em seguida, serão abordados casos mais complexos. Desta forma, a obtenção dos valores de atraso será dividida em dois casos:

- sistemas com tempo de serviço determinístico;
- sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço.

Em cada um destes sistemas abordados será inicialmente desenvolvida a expressão para o atraso dos usuários de baixa prioridade e, em seguida, para os de alta prioridade.

4.8.1 Sistemas com tempo de serviço determinístico

A partir da definição das expressões gerais, encontra-se o seguinte resultado para o atraso dos usuários de baixa prioridade:

$$\begin{aligned}
Atraso_{bp} = & \sum_{y=0}^{n_a} \sum_{z=1}^{n_b} \left(\frac{(1 + \min(B_L, z + y)) \min(B_L, z + y)}{2} \frac{\min(B_L, z + y)}{z + y} a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \frac{X(0)}{N_b} \right) + \\
& \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=0}^{n_a} \sum_{z=1}^{n_b} \left(\left(i - 1 + \frac{(1 + \min(B_L - i + 1, z + y))}{2} \right) \right. \\
& \left. \frac{\min(B_L - i + 1, z + y)}{z + y} a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \frac{X(i)}{N_b} \right) \tag{4.81}
\end{aligned}$$

onde,

$$N_b = 1 - Perda_{bp} = \text{probabilidade do usuário teste não ser perdido}$$

Pode-se verificar que esta expressão é dividida em duas partes. A primeira analisa o caso em que o usuário teste de baixa prioridade encontra o sistema vazio antes de ser aceito e a segunda considera a existência de unidades de informação armazenadas antes da chegada deste usuário teste. Desta forma, obtém-se o seguinte resultado:

- considerando o sistema inicialmente vazio ($i = 0$):

$$Atraso_{bp} = \sum_{y=0}^{n_a} \sum_{z=1}^{n_b} \left(\frac{(1 + \min(B_L, z + y)) \min(B_L, z + y)}{2} \frac{\min(B_L, z + y)}{z + y} a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \frac{X(0)}{N_b} \right)$$

- considerando o sistema inicialmente ocupado ($i > 0$):

$$\begin{aligned}
Atraso_{bp} = & \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=0}^{n_a} \sum_{z=1}^{n_b} \left(\left(i - 1 + \frac{(1 + \min(B_L - i + 1, z + y))}{2} \right) \right. \\
& \left. \frac{\min(B_L - i + 1, z + y)}{z + y} a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \frac{X(i)}{N_b} \right)
\end{aligned}$$

A seguir encontra-se uma explicação dos termos encontrados em 4.81:

- No caso onde $i > 0$, o termo $i-1$ representa o valor de D_1 , ou seja, a quantidade de unidades de informação armazenada no sistema antes da chegada do grupo contendo o usuário teste. Isto ocorre, pois, apesar do sistema estar no estado i quando é observado, um usuário é servido antes da chegada do grupo, como pode ser visto na Figura 4.2. Não existe nenhum termo análogo referente ao caso em que i é igual a zero, pois, neste caso, o valor de D_1 é nulo.
- O termo $\frac{(1+\min(B_L-i+1,z+y))}{2}$ representa o atraso médio do usuário teste dentro do grupo admitido quando $i > 0$ [13]. O valor $\min(B_L-i+1, z+y)$ referencia o tamanho deste grupo, que pode variar desde o espaço disponível no sistema para armazenamento até o número de usuários de alta e baixa prioridade gerados. Este termo é obtido através da expressão $\sum_{k=1}^{\min(B_L-i+1,z+y)} k \left(\frac{1}{z+y}\right)$, que calcula a posição média do usuário teste dentro do grupo admitido de que participa. A analogia em relação ao caso em que i é igual a zero ocorre com o termo $\frac{(1+\min(B_L,z+y))}{2}$.
- O termo $\frac{\min(B_L-i+1,z+y)}{z+y}$ representa a probabilidade do usuário teste ser aceito dado que o sistema se encontra no estado $i > 0$ antes da chegada do grupo em que está incluído. Desta forma, este valor está associado à divisão da quantidade de usuários aceitos pelo número de usuários gerados. O valor análogo associado ao caso em que i é igual a zero ocorre com o termo $\frac{\min(B_L,z+y)}{z+y}$.
- Os termos a_y^a , $\frac{z a_z^b}{E A r^b}$ e $X(i)$ possuem funções similares às encontradas para as expressões de probabilidade de perda.

Ao realizar uma análise em 4.81, considerando $i > 0$, verifica-se que o produto $\left(\frac{\min(B_L-i+1,z+y)}{z+y} a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} X(i)\right)$ representa a probabilidade $P(X = i \cap \text{tam.do grupo} = z+y \cap \text{us. teste } \tilde{n} \text{ é perdido})$ encontrada na equação 4.80. Da mesma forma, o termo $N_b = 1 - \text{Perda}_{bp}$ referencia a probabilidade $P(\text{us. teste } \tilde{n} \text{ é perdido})$ encontrada na mesma equação. Em relação ao valor de $\overline{D_1 + D_2}$, verifica-se que está associado à $\sum_{y=0}^{n_a} \sum_{z=1}^{n_b} \left(i - 1 + \frac{(1+\min(B_L-i+1,z+y))}{2}\right)$. A analogia destas expressões em relação ao caso em que i é igual a zero pode ser obtida ao observar os itens descritos anteriormente. Através destas definições, conclui-se a obtenção da expressão para o atraso dos usuários de baixa prioridade.

Para calcular o atraso dos usuários de alta prioridade utiliza-se um raciocínio análogo ao anterior. A partir de uma análise, verifica-se que as seguintes situações devem ser abordadas:

1. todas as unidades de informação de alta e baixa prioridade geradas sempre são armazenadas;
2. somente os usuários de alta prioridade podem ser aceitos no sistema;
3. existe a possibilidade de ocorrer a admissão de parte do tráfego de baixa prioridade e o restante é descartado.

No item 1, encontra-se uma situação simples e análoga ao atraso das unidades de informação de baixa prioridade. Desta forma, encontra-se a seguinte expressão:

$$Atraso1_{ap} = \sum_{i=0}^{B_L - (n_a + n_b)} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\left(\max(i-1, 0) + \frac{1+z+y}{2} \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) \quad (4.82)$$

onde,

$$N_a = 1 - Perda_{ap} = \text{probabilidade do usuário teste não ser perdido}$$

A partir de uma análise da expressão 4.82, verifica-se que o termo $\left(\max(i-1, 0) + \frac{1+z+y}{2} \right)$ representa o valor $\overline{D_1 + D_2}$ apresentado em 4.80. Como pode ser observado, a probabilidade do usuário teste de alta prioridade ser admitido é desconsiderada, pois o intervalo da variável i não permite o descarte desta unidade de informação. Portanto, o valor de N_a é utilizado devido ao termo $P(\text{us. teste } \tilde{\text{n}} \text{ é perdido})$ encontrado na equação geral.

No desenvolvimento do item 2, considera-se o número de unidades de informação armazenadas entre $B_L + 1$ e B_H . Este fato ocorre, pois, todos os usuários de baixa prioridade gerados são perdidos. Através deste conceito e da expressão 4.80, tem-se o seguinte resultado:

$$Atraso2_{ap} = \sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=1}^{n_a} \left(\left(i-1 + \frac{1 + \min(B_H - i + 1, y)}{2} \right) \frac{\min(B_H - i + 1, y)}{y} \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) \quad (4.83)$$

Como pode ser observado, o termo $\frac{\min(B_H - i + 1, y)}{y}$ é utilizado para representar a probabilidade do usuário teste de alta prioridade ser aceito dado que o sistema se encontra no estado $i > 0$ antes da chegada do grupo em que está incluído. Desta forma, a perda do usuário teste passa a ser considerada.

No caso da expressão relacionada ao item 3, tem-se uma situação mais complexa, pois utiliza-se a quantidade de unidades de informação de baixa prioridade admitidas (variável k). Portanto, através da função $c_2(k, z, y, i)$, tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
Atraso3_{ap} = & \sum_{i=B_L - (n_a + n_b) + 1}^{B_L} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\left(i - 1 + \frac{1 + \min(B_L - i + 1, z + y)}{2} \right) \right. \\
& \frac{\min(B_L - i + 1, z + y)}{z + y} + \sum_{k=0}^z \frac{\min(B_H - i + 1 - k, y)}{y} \\
& \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y + k - B_L + i - 1)}{2} \right) \\
& \left. \frac{\max(k + y - B_L + i - 1, 0)}{y} c_2(k, z, y, i) \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \quad (4.84)
\end{aligned}$$

A seguir, encontra-se uma explicação dos termos em 4.84:

- O fator $\frac{\min(B_H - i + 1 - k, y)}{y}$ representa a probabilidade do usuário teste ser aceito no sistema quando esta unidade de informação encontra, de acordo com a sua ordem no grupo de chegada, mais de B_L posições ocupadas no instante da chegada;
- Como o usuário teste admitido pode chegar no sistema antes ou depois do limite B_L , as probabilidades destes eventos ocorrerem são representadas por $\frac{\min(B_L - i + 1, z + y)}{z + y}$ e $\frac{\max(k + y - B_L + i - 1, 0)}{y}$, respectivamente;
- De forma análoga à equação 4.81, utiliza-se $\left(i - 1 + \frac{1 + \min(B_L - i + 1, z + y)}{2} \right)$ e $\left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y + k - B_L + i - 1)}{2} \right)$ para representar o atraso médio do usuário teste armazenado antes e depois do limite B_L , respectivamente;
- A função $c_2(k, z, y, i)$ é definida na seção 4.7.

Através de uma análise, verifica-se que o valor do atraso das unidades de informação de alta prioridade é alterado de acordo com a relação $B_L - (n_a + n_b) < 0$. Este fato ocorre pois, caso esta condição seja verdadeira, o usuário teste pode ser armazenado em uma posição superior à B_L quando o sistema está inicialmente vazio ($i = 0$). Desta forma, deve-se utilizar o seguinte termo quando $B_L - (n_a + n_b) < 0$:

$$\begin{aligned}
Atraso3_{ap(i=0)} &= \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\frac{\min(B_L, z+y)}{z+y} \left(\frac{1 + \min(B_L, z+p)}{2} \right) + \right. \\
&\quad \sum_{k=0}^z \frac{\max(k+y-B_L, 0)}{y} \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y+k-B_L)}{2} \right) \\
&\quad \left. \frac{\min(B_H - k, y)}{y} c_3(k, z, y, 0) \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(0)}{N_a} \quad (4.85)
\end{aligned}$$

Esta expressão representa o atraso médio da unidade de informação teste quando $i = 0$. Os fatores encontrados em 4.85 são análogos aos da expressão 4.84, mas considerando o sistema inicialmente vazio. Através dos termos desenvolvidos, encontra-se o seguinte algoritmo para o atraso dos usuários de alta prioridade:

- Se $B_L - (n_a + n_b) \geq 0$:

$$\begin{aligned}
Atraso_{ap} &= \sum_{i=0}^{B_L - (n_a + n_b)} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\left(\max(i-1, 0) + \frac{1+z+y}{2} \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) + \\
&\quad \sum_{i=B_L - (n_a + n_b) + 1}^{B_L} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\left(i-1 + \frac{1 + \min(B_L - i + 1, z+y)}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{\min(B_L - i + 1, z+y)}{z+y} + \sum_{k=0}^z \frac{\min(B_H - i + 1 - k, y)}{y} \right. \\
&\quad \left. \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y+k-B_L+i-1)}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{\max(k+y-B_L+i-1, 0)}{y} c_2(k, z, y, i) \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} + \\
&\quad \sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=1}^{n_a} \left(\left(i-1 + \frac{1 + \min(B_H - i + 1, y)}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{\min(B_H - i + 1, y)}{y} \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) \quad (4.86)
\end{aligned}$$

- Se $B_L - (n_a + n_b) < 0$:

$$\begin{aligned}
Atraso_{ap} &= \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\frac{\min(B_L, z+y)}{z+y} \left(\frac{1 + \min(B_L, z+p)}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=0}^z \frac{\max(k+y-B_L, 0)}{y} \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y+k-B_L)}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\min(B_H - k, y)}{y} c_3(k, z, y, 0) \Big) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(0)}{N_a} + \\
& \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\left(i - 1 + \frac{1 + \min(B_L - i + 1, z + y)}{2} \right) \right. \\
& \frac{\min(B_L - i + 1, z + y)}{z + y} + \sum_{k=0}^z \frac{\min(B_H - i + 1 - k, y)}{y} \\
& \left. \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y + k - B_L + i - 1)}{2} \right) \right) \\
& \frac{\max(k + y - B_L + i - 1, 0)}{y} c_2(k, z, y, i) \Big) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} + \\
& \sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=1}^{n_a} \left(\left(i - 1 + \frac{1 + \min(B_H - i + 1, y)}{2} \right) \right. \\
& \left. \frac{\min(B_H - i + 1, y)}{y} \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) \tag{4.87}
\end{aligned}$$

onde,

$N_a = 1 - Perda_{ap}$ = probabilidade do usuário teste não ser perdido

Como pode ser observado, enquanto a expressão 4.86 combina os resultados encontrados em 4.82, 4.83 e 4.84, a equação 4.87 utiliza os somatórios de 4.83, 4.84 e 4.85.

4.8.2 Sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço

Assim como no caso da probabilidade de perda, os resultados para esta qualidade de serviço são obtidos a partir de uma analogia com as equações desenvolvidas considerando um tempo de serviço determinístico (subseção 4.8.1). Neste caso, considera-se uma variável aleatória geométrica com parâmetro β para representar o tempo de serviço das unidades de informação. Desta forma, encontra-se as seguintes expressões:

Para os usuários de baixa prioridade

$$\begin{aligned}
Atraso_{bp} &= \frac{1}{\beta} \left(\sum_{y=0}^{n_a} \sum_{z=1}^{n_b} \left(\frac{(1 + \min(B_L, z + y)) \min(B_L, z + y)}{2} \frac{a_z^b}{z + y} a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \frac{X(0)}{N_b} \right) \right. \\
& \left. \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=0}^{n_a} \sum_{z=1}^{n_b} \left(\left(i - 1 + \frac{(1 + \min(B_L - i + 1, z + y))}{2} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\min(B_L - i + 1, z + y)}{z + y} a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \frac{X(i)}{N_b} \Big) \beta + \\
& \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=0}^{n_a} \sum_{z=1}^{n_b} \left(\left(i + \frac{(1 + \min(B_L - i, z + y))}{2} \right) \right. \\
& \left. \frac{\min(B_L - i, z + y)}{z + y} a_y^a \frac{z a_z^b}{E A r^b} \frac{X(i)}{N_b} \right) (1 - \beta) \Big) \quad (4.88)
\end{aligned}$$

onde,

$N_b = 1 - Perda_{bp}$ = probabilidade do usuário teste não ser perdido

Para os usuários de alta prioridade:

- Se $B_L - (n_a + n_b) \geq 0$:

$$\begin{aligned}
Atraso_{ap} = & \frac{1}{\beta} \left(\left(\sum_{i=0}^{B_L - (n_a + n_b)} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\max(i - 1, 0) + \frac{1 + z + y}{2} \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) \beta + \right. \\
& \left(\sum_{i=0}^{B_L - (n_a + n_b)} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\max(i, 0) + \frac{1 + z + y}{2} \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) (1 - \beta) + \\
& \left(\sum_{i=B_L - (n_a + n_b) + 1}^{B_L} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\left(i - 1 + \frac{1 + \min(B_L - i + 1, z + y)}{2} \right) \right. \right. \\
& \left. \frac{\min(B_L - i + 1, z + y)}{z + y} + \sum_{k=0}^z \frac{\min(B_H - i + 1 - k, y)}{y} \right. \\
& \left. \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y + k - B_L + i - 1)}{2} \right) \right. \\
& \left. \frac{\max(k + y - B_L + i - 1, 0)}{y} c_2(k, z, y, i) \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \Big) \beta + \\
& \left(\sum_{i=B_L - (n_a + n_b) + 1}^{B_L} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\left(i + \frac{1 + \min(B_L - i, z + y)}{2} \right) \right. \right. \\
& \left. \frac{\min(B_L - i, z + y)}{z + y} + \sum_{k=0}^z \frac{\min(B_H - i - k, y)}{y} \right. \\
& \left. \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y + k - B_L + i)}{2} \right) \right. \\
& \left. \frac{\max(k + y - B_L + i, 0)}{y} c_3(k, z, y, i) \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \Big) (1 - \beta) + \\
& \left(\sum_{i=B_L + 1}^{B_H} \sum_{y=1}^{n_a} \left(i - 1 + \frac{1 + \min(B_H - i + 1, y)}{2} \right) \right. \\
& \left. \frac{\min(B_H - i + 1, y)}{y} \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) \beta +
\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=1}^{n_a} \left(i + \frac{1 + \min(B_H - i, y)}{2} \right) \frac{\min(B_H - i, y)}{y} \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) (1 - \beta) \quad (4.89)$$

- Se $B_L - (n_a + n_b) < 0$:

$$\begin{aligned} \text{Atraso}_{ap} = & \frac{1}{\beta} \left(\sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\frac{\min(B_L, z + y)}{z + y} \left(\frac{1 + \min(B_L, z + p)}{2} \right) + \right. \right. \\ & \sum_{k=0}^z \frac{\max(k + y - B_L, 0)}{y} \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y + k - B_L)}{2} \right) \\ & \left. \frac{\min(B_H - k, y)}{y} c_3(k, z, y, 0) \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(0)}{N_a} + \\ & \left(\sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\left(i - 1 + \frac{1 + \min(B_L - i + 1, z + y)}{2} \right) \right. \right. \\ & \left. \frac{\min(B_L - i + 1, z + y)}{z + y} + \sum_{k=0}^z \frac{\min(B_H - i + 1 - k, y)}{y} \right. \\ & \left. \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y + k - B_L + i - 1)}{2} \right) \right. \\ & \left. \frac{\max(k + y - B_L + i - 1, 0)}{y} c_2(k, z, y, i) \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \beta + \\ & \left(\sum_{i=1}^{B_L} \sum_{y=1}^{n_a} \sum_{z=0}^{n_b} \left(\left(i + \frac{1 + \min(B_L - i, z + y)}{2} \right) \right. \right. \\ & \left. \frac{\min(B_L - i, z + y)}{z + y} + \sum_{k=0}^z \frac{\min(B_H - i - k, y)}{y} \right. \\ & \left. \left(B_L + \frac{1 + \min(B_H - B_L, y + k - B_L + i)}{2} \right) \right. \\ & \left. \frac{\max(k + y - B_L + i, 0)}{y} c_3(k, z, y, i) \right) a_z^b \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) (1 - \beta) + \\ & \left(\sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=1}^{n_a} \left(i - 1 + \frac{1 + \min(B_H - i + 1, y)}{2} \right) \right. \\ & \left. \frac{\min(B_H - i + 1, y)}{y} \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) \beta + \\ & \left(\sum_{i=B_L+1}^{B_H} \sum_{y=1}^{n_a} \left(i + \frac{1 + \min(B_H - i, y)}{2} \right) \right. \\ & \left. \frac{\min(B_H - i, y)}{y} \frac{y a_y^a}{E A r^a} \frac{X(i)}{N_a} \right) (1 - \beta) \quad (4.90) \end{aligned}$$

onde,

$$N_a = 1 - Perda_{ap} = \text{probabilidade do usuário teste não ser perdido}$$

Como pode ser observado nas expressões 4.88, 4.89 e 4.90, além de ser utilizada a posição do usuário teste no sistema, também deve-se considerar o número médio de segmentos de tempo associado ao atendimento das unidades de informação. Este tempo médio é representado pelo termo $\frac{1}{\beta}$.

Neste ponto, termina-se a apresentação dos modelos propostos.

Capítulo 5

Aplicações Práticas

Nesta parte do trabalho, serão apresentadas as possíveis aplicações do modelo matemático desenvolvido no capítulo 4. Conforme será observado, apesar dos resultados analíticos estarem relacionados a um sistema específico, a idéia utilizada pode ser direcionada a diferentes sistemas que utilizam outras disciplinas para tratamento das filas. Este fato demonstra a abrangência relacionada à aplicação dos modelos definidos.

A abordagem empregada envolve o mapeamento do método matemático e dos seus respectivos parâmetros para representar as características de arquiteturas *Diffserv* conhecidas. Desta forma, serão enfatizadas as seguintes disciplinas de filas:

- Disciplina *Threshold Dropping*
- Disciplina *Priority Scheduling*

5.1 Disciplina Threshold Dropping

Como pode ser observado, os sistemas $GEOM/D/1/B_H$, $MMBP/D/1/B_H$, $GEOM/GEOM/1/B_H$ e $MMBP/GEOM/1/B_H$, encontrados no capítulo 4, diferenciam o tratamento das prioridades de descarte da mesma forma que a disciplina *Threshold Dropping* definida na seção 3.2. Este fato pode ser constatado se os valores B_H e B_L do modelo desenvolvido forem associados aos parâmetros utilizados nesta disciplina de fila para restringir a entrada do tráfego de alta e baixa prioridade, respectivamente. Desta forma, conclui-se que a aplicação dos resultados analíticos neste sistema *Diffserv* é imediata. A próxima etapa é validar os valores obtidos do modelo.

5.1.1 Resultados obtidos

Neste ponto, os valores relacionados à probabilidade de perda e atraso dos fluxos de alta e baixa prioridade são obtidos do modelo analítico e comparados com simulações. A fim de descrever o sistema, utiliza-se os seguintes parâmetros: taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a), taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b), número de fontes de alta prioridade (n_a), número de fontes de baixa prioridade (n_b), B_H e B_L . No caso das fontes MMBP, também serão incorporados os parâmetros p_{12} e p_{21} , ou seja, as probabilidades das fontes alterarem seu funcionamento do estado E_1 para E_2 e E_2 para E_1 , respectivamente. Os valores extraídos do modelo serão dispostos em gráficos, de forma que os seus respectivos comportamentos sejam caracterizados em função das taxas médias, ou seja, ρ_a e ρ_b .

A fim de realizar simulações, utilizou-se um programa desenvolvido em C++ [39, 40, 41, 42] que representa o funcionamento do sistema. Neste simulador, foi considerada a variação dos mesmos parâmetros utilizados para obter os valores analíticos. Uma vez os dados extraídos deste programa estejam próximos aos resultados do método matemático, conclui-se que o modelo pode ser aplicado em projetos futuros.

Em relação aos valores simulados, foi considerado um intervalo de confiança de 95 por cento e um erro percentual menor ou igual a 2.5 por cento [43]. Devido a precisão de diversas medidas, muitos erros percentuais ficaram abaixo do valor de 2.5 por cento. É importante mencionar que, para extrair os valores de atraso, o simulador utilizou um segmento de tempo de 8ms. O ambiente de trabalho foi constituído dos programas Maple V [44, 45], aplicado na obtenção dos resultados analíticos, e Visual C++ 6.0, onde o simulador foi desenvolvido.

Em relação à ordem de apresentação, primeiramente serão avaliados os resultados relativos à probabilidade de perda e, em seguida, os associados ao atraso. Após cada conjunto de gráficos e tabelas com estes valores de qualidade de serviço, será realizada uma análise do método matemático empregado. Através destas observações, um projetista poderá verificar a possibilidade de aplicar o modelo analítico desenvolvido no seu projeto.

Nesta subseção serão apresentados os resultados relativos a um serviço determinístico. O caso associado à um tempo de atendimento geométrico será abordado no próximo capítulo.

É importante observar que, no caso das fontes *MMBP*, os valores das taxas médias de chegada são obtidos através de composições das probabilidades dos usuários serem gerados nos estados E_1 e E_2 . Estas relações podem ser vistas nas expressões 4.27 e 4.28. Na próxima tabela, apresenta-se as associações entre as taxas de chegada e os valores de p_1^a e p_2^a , considerando o caso em que existem duas fontes de alta prioridade. Como todas as fontes são idênticas, os mesmos valores são aplicados para o fluxo de baixa prioridade.

	ρ_a	p_1^a	p_2^a
1	0.14	0.10	0.02
2	0.332	0.40	0.01
3	0.504	0.60	0.02
4	0.70	0.80	0.05
5	0.804	0.90	0.07
6	0.90	0.90	0.15
7	1.008	0.90	0.24
8	1.104	0.90	0.32
9	1.20	0.90	0.40
10	1.308	0.90	0.49

Tabela 5.1: Relação entre a taxa média dos usuários de alta prioridade (ρ_a), considerando $n_a = 2$, e os valores de p_1^a e p_2^a

Resultados obtidos para probabilidade de perda no sistema GEOM/D/1/ B_H

Considerando a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a)

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	2.487679079e-8	0.000000e+00
2	0.3	1.922229914e-5	1.901980e-05
3	0.5	5.953664038e-4	5.916000e-04
4	0.7	6.635494334e-3	6.636000e-03
5	0.8	1.729937206e-2	1.736240e-02
6	0.9	3.872250529e-2	3.873180e-02
7	1.0	7.428876853e-2	7.415980e-02
8	1.1	1.228351736e-1	1.227194e-01
9	1.2	1.784885106e-1	1.783890e-01
10	1.3	2.345420147e-1	2.341406e-01

Tabela 5.2: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

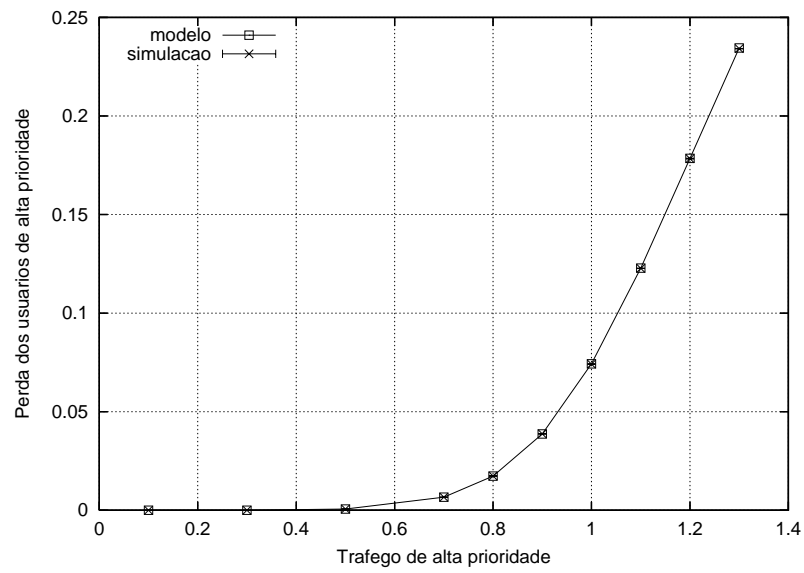


Figura 5.1: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.2

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	1.209569298e-1	1.205360e-01
2	0.3	3.031882075e-1	3.036102e-01
3	0.5	5.001231036e-1	5.008092e-01
4	0.7	6.953982922e-1	6.953758e-01
5	0.8	7.861722417e-1	7.856392e-01
6	0.9	8.651524647e-1	8.646472e-01
7	1.0	9.257117450e-1	9.253878e-01
8	1.1	9.648813852e-1	9.648890e-01
9	1.2	9.858137958e-1	9.859402e-01
10	1.3	9.950953815e-1	9.951542e-01

Tabela 5.3: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

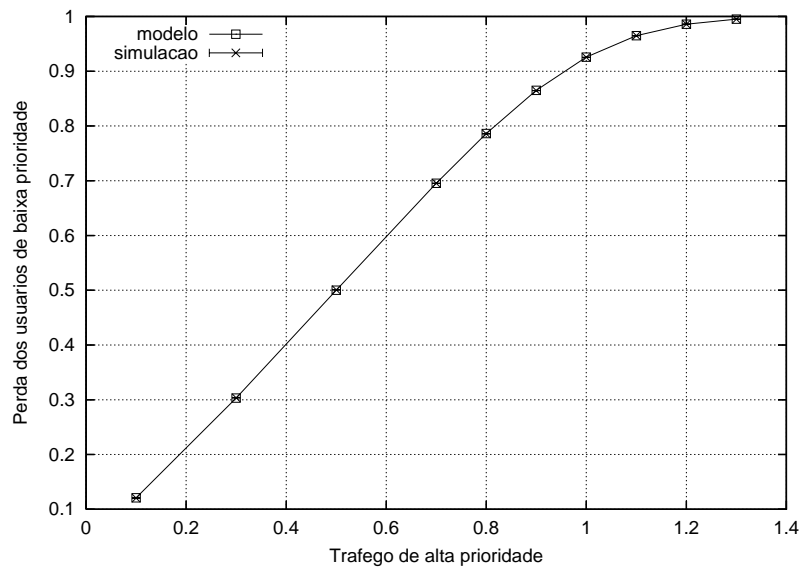


Figura 5.2: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.3

Como pode ser observado nas Figuras 5.1 e 5.2, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e os limites para armazenar as unidades de informação são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. O valor 1.0 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Considerando a variação da taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b)

	ρ_b	modelo	simulação
1	0.1	4.648269780e-2	4.602700e-02
2	0.3	6.107192943e-2	6.055480e-02
3	0.5	6.747759695e-2	6.762340e-02
4	0.7	7.107308618e-2	7.143700e-02
5	0.8	7.234922543e-2	7.242680e-02
6	0.9	7.340315685e-2	7.316340e-02
7	1.0	7.428876853e-2	7.415980e-02
8	1.1	7.504307095e-2	7.523180e-02
9	1.2	7.569241410e-2	7.605040e-02
10	1.3	7.625613810e-2	7.709280e-02

Tabela 5.4: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_a = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

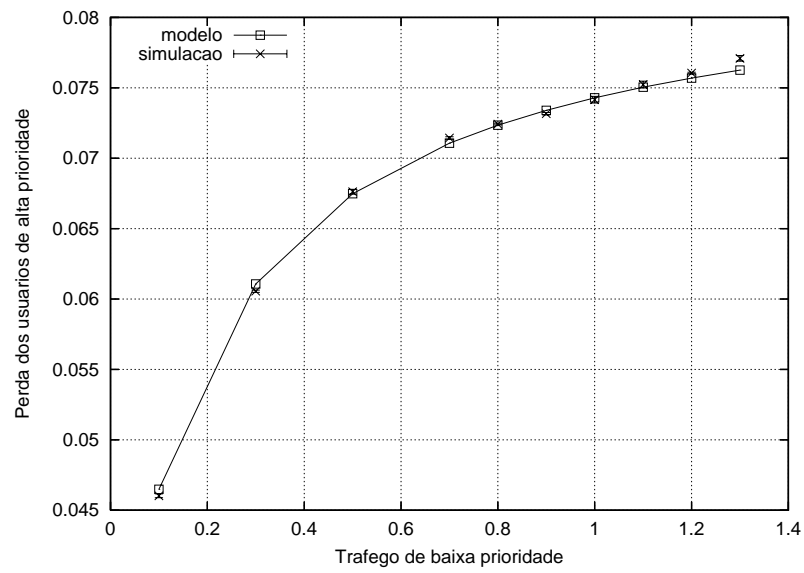


Figura 5.3: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.4

	ρ_b	modelo	simulação
1	0.1	6.307641568e-1	6.310172e-01
2	0.3	7.998236673e-1	8.002892e-01
3	0.5	8.652937484e-1	8.656066e-01
4	0.7	8.984888856e-1	8.988872e-01
5	0.8	9.095699486e-1	9.099776e-01
6	0.9	9.184428055e-1	9.185934e-01
7	1.0	9.257117450e-1	9.253878e-01
8	1.1	9.317791578e-1	9.312590e-01
9	1.2	9.369230187e-1	9.364418e-01
10	1.3	9.413414384e-1	9.411212e-01

Tabela 5.5: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_a = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

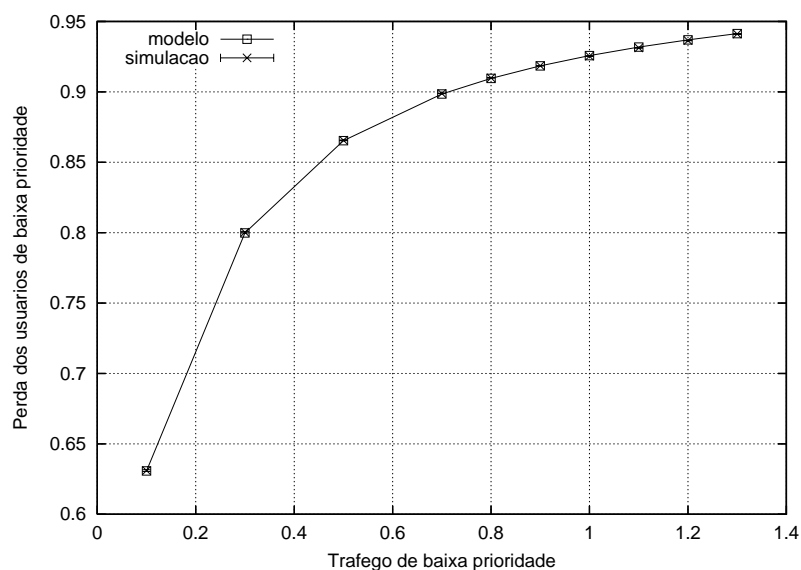


Figura 5.4: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.5

Como pode ser observado nas Figuras 5.3 e 5.4, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e os limites para armazenar as unidades de informação são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. O valor 1.0 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Resultados obtidos para probabilidade de perda no sistema MMBP/D/1/ B_H

Considerando a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a)

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	1.774043163e-10	0.000000e+00
2	0.332	2.623329175e-06	2.591743e-06
3	0.504	1.487124819e-04	1.489079e-04
4	0.70	3.576229482e-03	3.592900e-03
5	0.804	1.251136756e-02	1.250080e-02
6	0.90	3.174261217e-02	3.157580e-02
7	1.008	7.114229922e-02	7.119880e-02
8	1.104	1.203611285e-01	1.203116e-01
9	1.200	1.760297090e-01	1.758698e-01
10	1.308	2.379782272e-01	2.376346e-01

Tabela 5.6: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

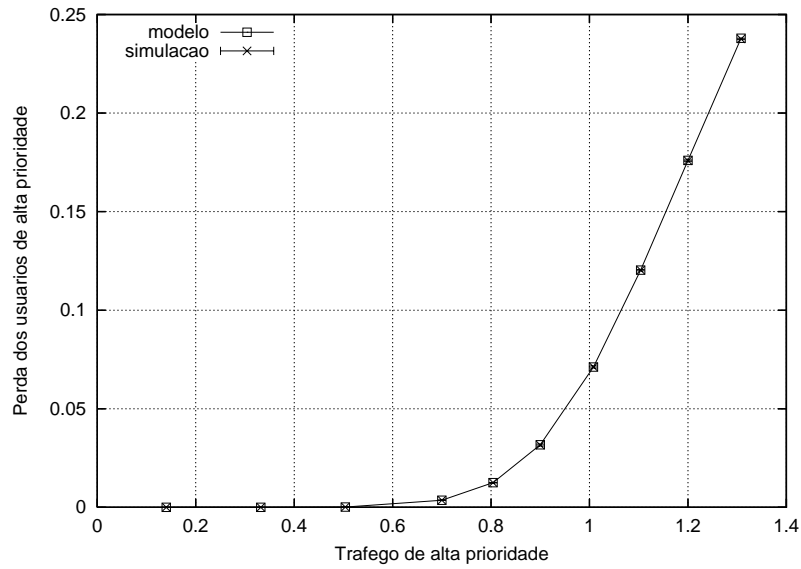


Figura 5.5: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.6

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	1.112244146e-03	1.108100e-03
2	0.332	9.164824568e-03	9.191200e-03
3	0.504	2.495204823e-02	2.494420e-02
4	0.70	5.947867911e-02	5.952240e-02
5	0.804	8.624410916e-02	8.625900e-02
6	0.90	1.159311264e-01	1.158958e-01
7	1.008	1.540489493e-01	1.540256e-01
8	1.104	1.908693370e-01	1.908896e-01
9	1.200	2.291324538e-01	2.290754e-01
10	1.308	2.724237099e-01	2.723946e-01

Tabela 5.7: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$

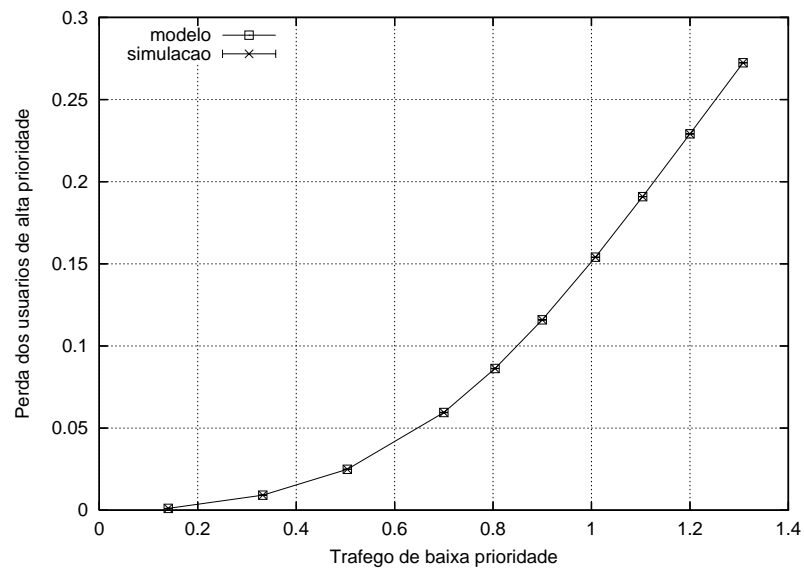


Figura 5.6: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.7

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	7.771558210e-04	7.665667e-04
2	0.332	2.923415409e-02	2.926643e-02
3	0.504	1.424119631e-01	1.424431e-01
4	0.70	4.200187168e-01	4.201647e-01
5	0.804	5.966913116e-01	5.962610e-01
6	0.90	7.462450210e-01	7.454806e-01
7	1.008	8.737921825e-01	8.733332e-01
8	1.104	9.427299188e-01	9.427374e-01
9	1.200	9.777101574e-01	9.778672e-01
10	1.308	9.935011293e-01	9.934624e-01

Tabela 5.8: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

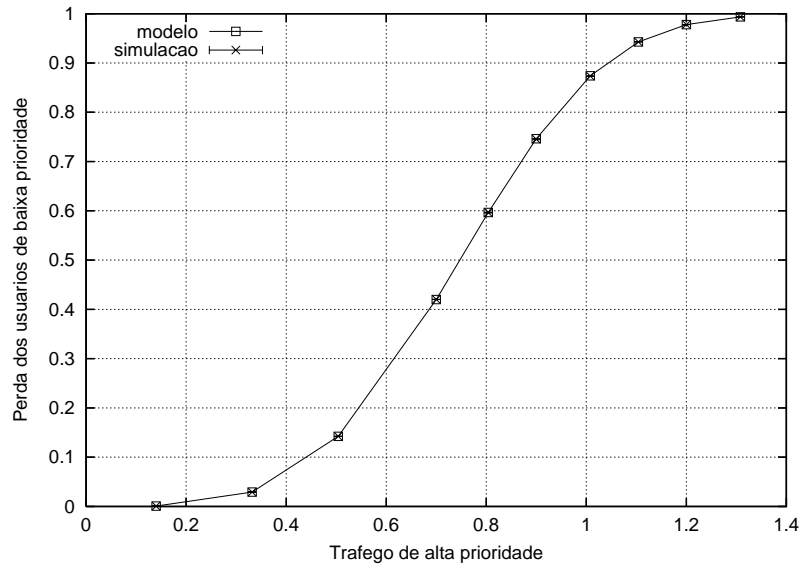


Figura 5.7: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.8

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	4.359751043e-02	4.361130e-002
2	0.332	1.561455965e-01	1.561384e-001
3	0.504	2.834246732e-01	2.833542e-001
4	0.70	4.606165338e-01	4.606476e-001
5	0.804	5.588184376e-01	5.589234e-001
6	0.90	6.457793559e-01	6.457151e-001
7	1.008	7.343933369e-01	7.344670e-001
8	1.104	8.019825335e-01	8.020371e-001
9	1.200	8.577634995e-01	8.577694e-001
10	1.308	9.065786426e-01	9.065140e-001

Tabela 5.9: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$

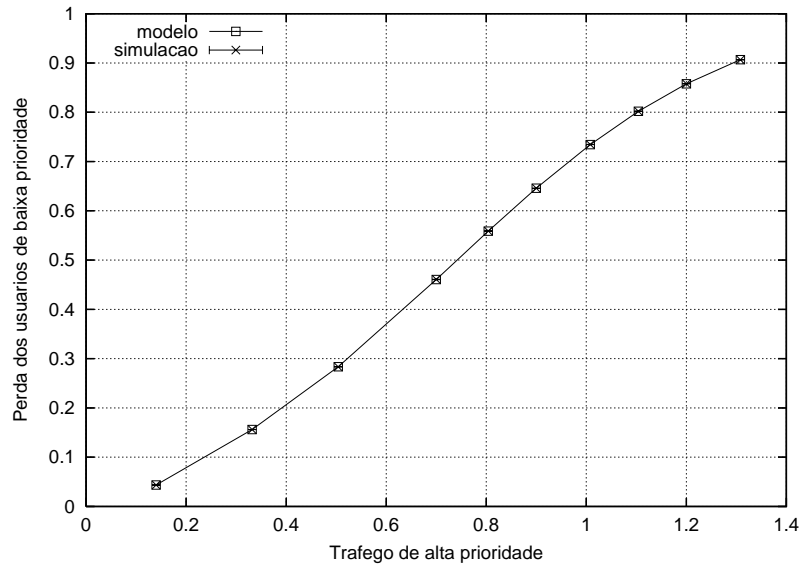


Figura 5.8: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.9

Como pode ser observado nas Figuras de 5.5 a 5.8, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$). Os limites para armazenar estas unidades de informação são especificados através de dois conjuntos de valores. O primeiro considera $B_L = 5$ e $B_H = 8$ e o segundo $B_L = 2$ e $B_H = 3$. O valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

É importante observar que, nas Figuras 5.6 e 5.8, quando $B_L = 2$ e $B_H = 3$ existe a possibilidade de haver a perda de usuários de alta e baixa prioridade quando o sistema está vazio antes da chegada de tráfego.

Considerando a variação da taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b)

	ρ_b	modelo	simulação
1	0.14	1.102628343e-06	0.000000e+00
2	0.332	3.643949053e-05	3.633333e-05
3	0.504	1.487124819e-04	1.489079e-04
4	0.70	3.538649706e-04	3.492000e-04
5	0.804	4.614041224e-04	4.613000e-04
6	0.90	5.497515761e-04	5.369333e-04
7	1.008	6.354592736e-04	6.210000e-04
8	1.104	7.005934248e-04	6.780000e-04
9	1.200	7.568315793e-04	7.416000e-04
10	1.308	8.111501366e-04	7.990000e-04

Tabela 5.10: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_a = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

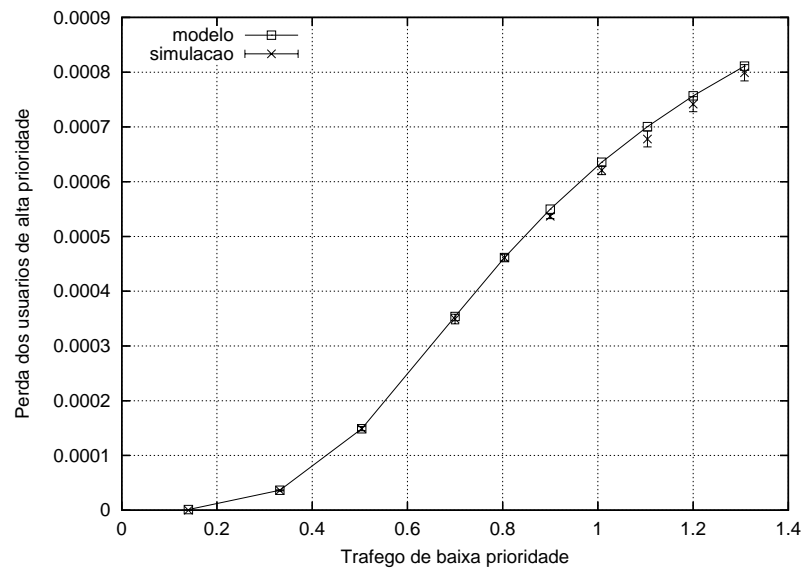


Figura 5.9: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.10

	ρ_b	modelo	simulação
1	0.14	1.799742471e-03	1.798800e-03
2	0.332	3.999366920e-02	4.009419e-02
3	0.504	1.424119631e-01	1.424429e-01
4	0.70	3.081618407e-01	3.080868e-01
5	0.804	3.878438865e-01	3.877540e-01
6	0.90	4.501042864e-01	4.500544e-01
7	1.008	5.079799867e-01	5.081090e-01
8	1.104	5.504964668e-01	5.506028e-01
9	1.200	5.863697182e-01	5.863408e-01
10	1.308	6.204859259e-01	6.204712e-01

Tabela 5.11: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_a = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

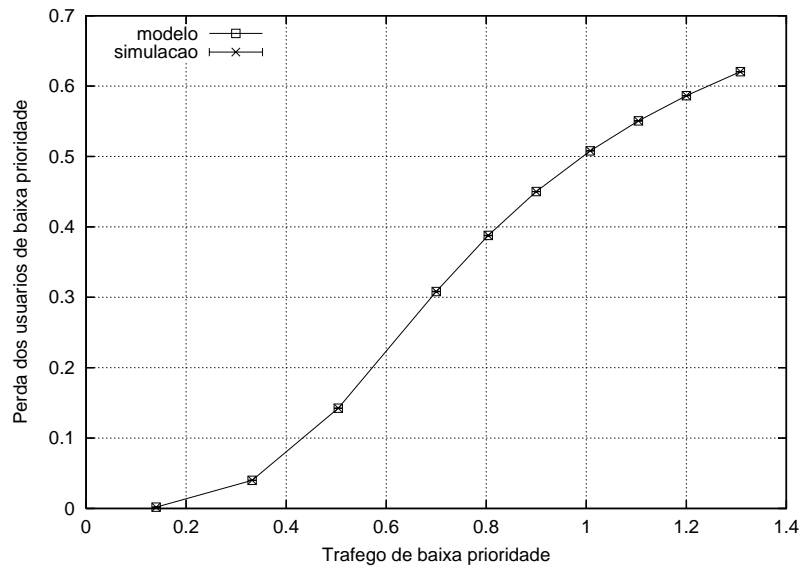


Figura 5.10: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.11

Como pode ser observado nas Figuras de 5.9 a 5.10, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$). Os limites para armazenar estas unidades de informação são especificados através de dois conjuntos de valores. O primeiro considera $B_L = 5$ e $B_H = 8$ e o segundo $B_L = 2$ e $B_H = 3$. O valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

Análise dos Resultados

Através de um estudo nos gráficos de 5.1 a 5.10, verifica-se que os resultados obtidos para a perda dos usuários de alta e baixa prioridade podem ser diretamente aplicados em projetos. Este fato ocorre devido à grande proximidade entre os valores teóricos e simulados.

Resultados obtidos para atraso no sistema GEOM/D/1/ B_H

Considerando a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a)

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	3.335008577e-02	3.337740e-02
2	0.3	3.996012617e-02	3.998920e-02
3	0.5	4.388512693e-02	4.389120e-02
4	0.7	4.758904026e-02	4.758080e-02
5	0.8	4.980376723e-02	4.979380e-02
6	0.9	5.232542544e-02	5.231220e-02
7	1.0	5.500059958e-02	5.498620e-02
8	1.1	5.753458971e-02	5.753160e-02
9	1.2	5.964977698e-02	5.965780e-02
10	1.3	6.122870479e-02	6.123060e-02

Tabela 5.12: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

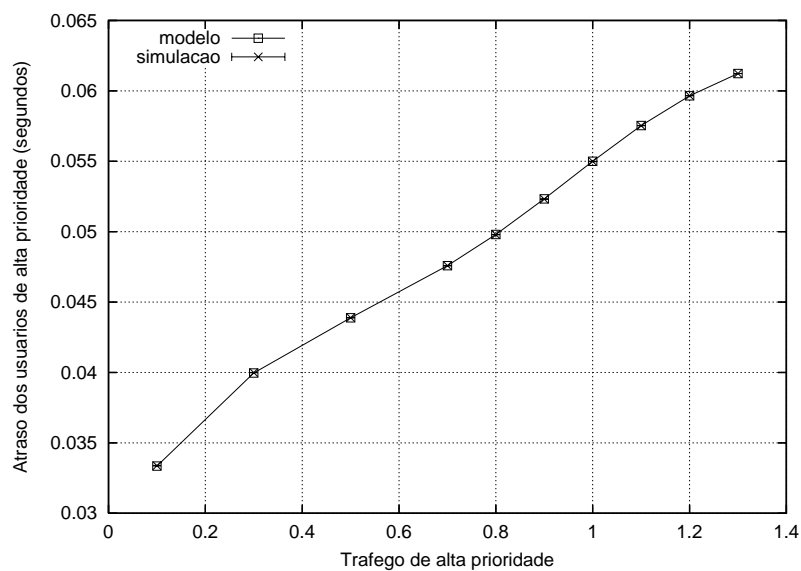


Figura 5.11: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.12

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	2.954954802e-02	2.951380e-02
2	0.3	3.477356434e-02	3.476300e-02
3	0.5	3.712419583e-02	3.713480e-02
4	0.7	3.831937005e-02	3.834120e-02
5	0.8	3.870365638e-02	3.872860e-02
6	0.9	3.900083850e-02	3.902400e-02
7	1.0	3.923430582e-02	3.923960e-02
8	1.1	3.941968799e-02	3.940740e-02
9	1.2	3.956772062e-02	3.953680e-02
10	1.3	3.968596786e-02	3.964800e-02

Tabela 5.13: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

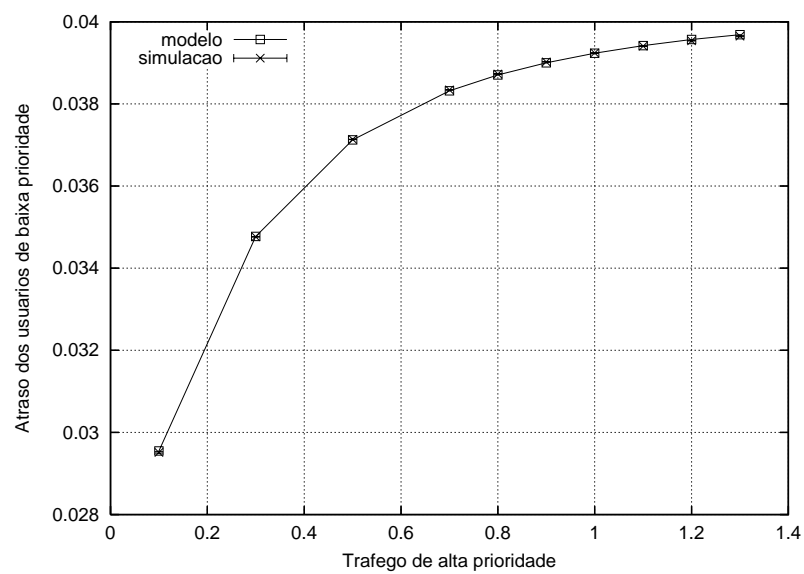


Figura 5.12: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.13

Como pode ser observado nas Figuras 5.11 e 5.12, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e os limites para armazenar as unidades de informação são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. O valor 1.0 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Considerando a variação da taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b)

	ρ_b	modelo	simulação
1	0.1	4.492135907e-02	4.488220e-02
2	0.3	5.111254473e-02	5.107820e-02
3	0.5	5.322205515e-02	5.323800e-02
4	0.7	5.421874618e-02	5.425840e-02
5	0.8	5.454087928e-02	5.457300e-02
6	0.9	5.479504339e-02	5.480220e-02
7	1.0	5.500059958e-02	5.498620e-02
8	1.1	5.517007645e-02	5.516620e-02
9	1.2	5.531193235e-02	5.533140e-02
10	1.3	5.543208740e-02	5.547960e-02

Tabela 5.14: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_a = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

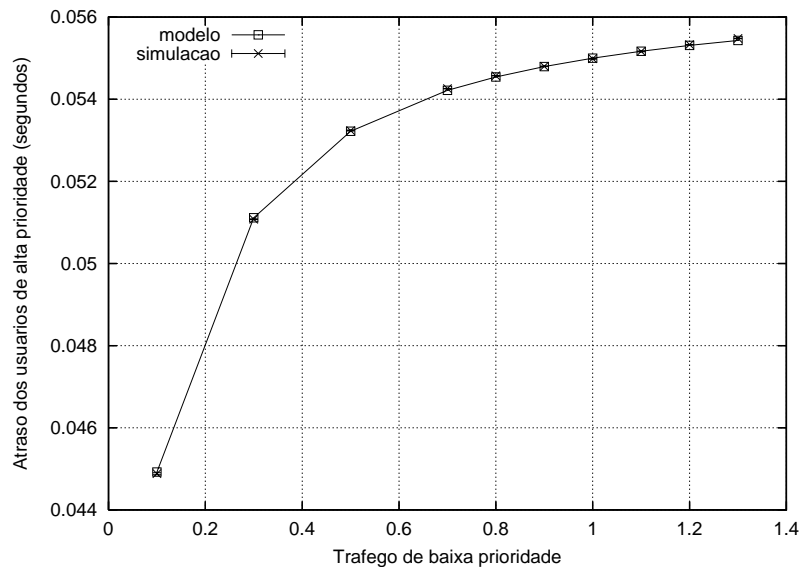


Figura 5.13: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.14

	ρ_b	modelo	simulação
1	0.1	2.986669604e-02	2.987960e-02
2	0.3	3.481445434e-02	3.485840e-02
3	0.5	3.712860726e-02	3.716560e-02
4	0.7	3.831973494e-02	3.833080e-02
5	0.8	3.870374182e-02	3.871000e-02
6	0.9	3.900085279e-02	3.900480e-02
7	1.0	3.923430582e-02	3.923960e-02
8	1.1	3.941968667e-02	3.942740e-02
9	1.2	3.956772026e-02	3.957640e-02
10	1.3	3.968596824e-02	3.969260e-02

Tabela 5.15: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/ B_H com $\rho_a = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

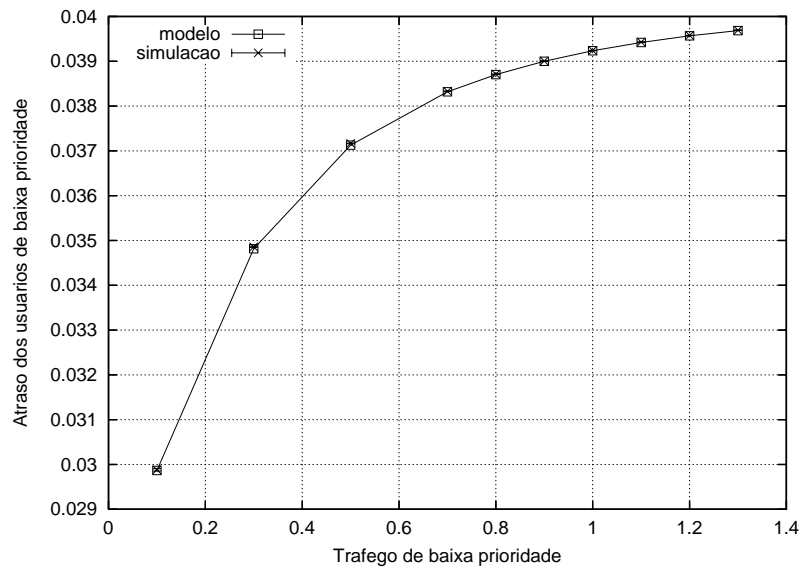


Figura 5.14: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.15

Como pode ser observado nas Figuras 5.11 e 5.12, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e os limites para armazenar as unidades de informação são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. O valor 1.0 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Resultados obtidos para atraso no sistema MMBP/D/1/ B_H

Considerando a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a)

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	1.260314149e-02	1.259520e-02
2	0.332	1.942022793e-02	1.942330e-02
3	0.504	2.846099342e-02	2.843750e-02
4	0.70	3.960769954e-02	3.950955e-02
5	0.804	4.478460353e-02	4.452570e-02
6	0.90	4.914496358e-02	4.876000e-02
7	1.008	5.355242426e-02	5.304400e-02
8	1.104	5.681919181e-02	5.623200e-02
9	1.200	5.931062774e-02	5.866260e-02
10	1.308	6.122657063e-02	6.052900e-02

Tabela 5.16: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

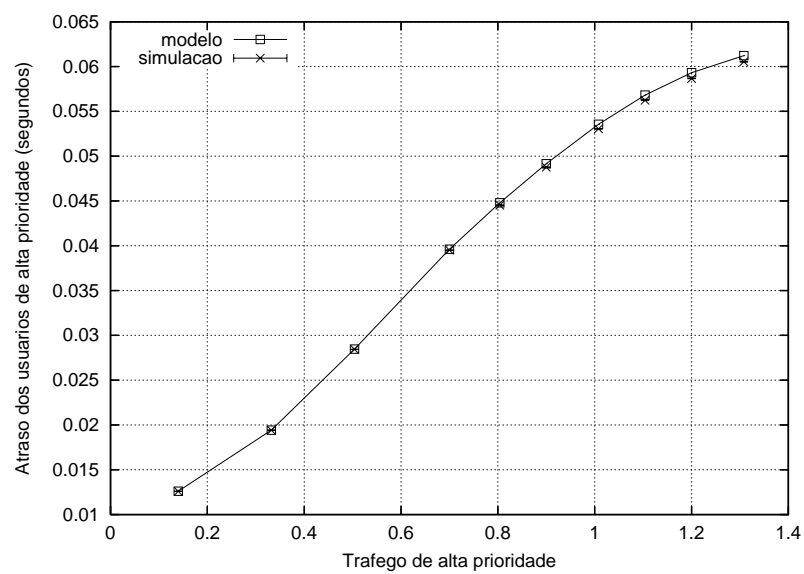


Figura 5.15: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.16

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	1.162038053e-02	1.162360e-02
2	0.332	1.369256468e-02	1.369390e-02
3	0.504	1.548747482e-02	1.548640e-02
4	0.70	1.763080839e-02	1.762960e-02
5	0.804	1.873485239e-02	1.873700e-02
6	0.90	1.969179882e-02	1.969060e-02
7	1.008	2.066583946e-02	2.066680e-02
8	1.104	2.142189710e-02	2.142160e-02
9	1.200	2.206616661e-02	2.206540e-02
10	1.308	2.265762362e-02	2.265720e-02

Tabela 5.17: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$

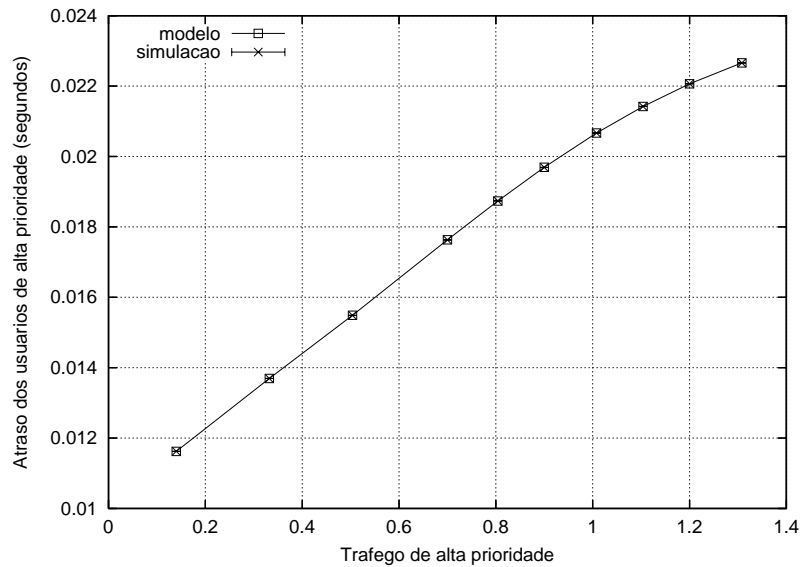


Figura 5.16: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.17

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	1.177547415e-02	1.174890e-02
2	0.332	1.819377730e-02	1.817563e-02
3	0.504	2.498355477e-02	2.500754e-02
4	0.70	3.179090610e-02	3.184360e-02
5	0.804	3.428299262e-02	3.432260e-02
6	0.90	3.593819790e-02	3.596520e-02
7	1.008	3.724069048e-02	3.727560e-02
8	1.104	3.804735304e-02	3.807080e-02
9	1.200	3.862726757e-02	3.862940e-02
10	1.308	3.909256272e-02	3.906920e-02

Tabela 5.18: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

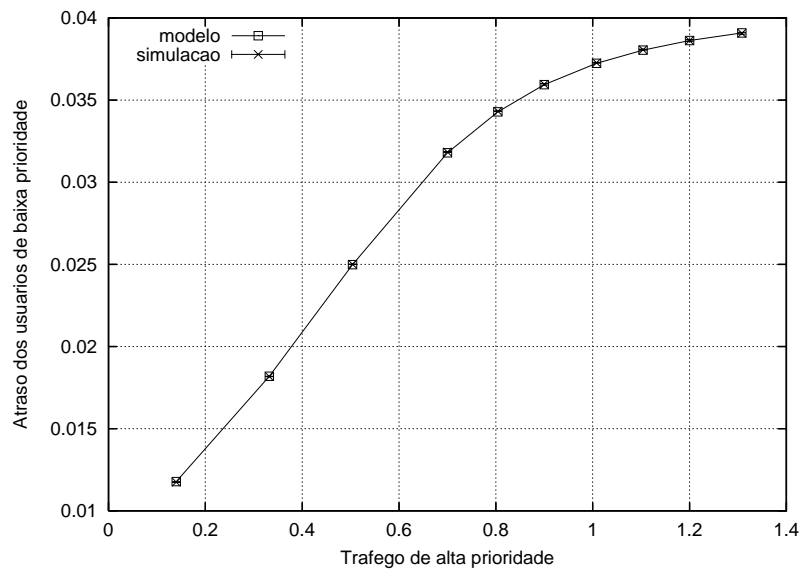


Figura 5.17: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.18

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	1.027246266e-2	1.027440e-002
2	0.332	1.155011146e-2	1.155140e-002
3	0.504	1.241696060e-2	1.241640e-002
4	0.70	1.330318639e-2	1.330220e-002
5	0.804	1.372795914e-2	1.372740e-002
6	0.90	1.409073005e-2	1.408900e-002
7	1.008	1.446369035e-2	1.446320e-002
8	1.104	1.476257875e-2	1.476360e-002
9	1.200	1.502951688e-2	1.503020e-002
10	1.308	1.529042334e-2	1.528780e-002

Tabela 5.19: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$

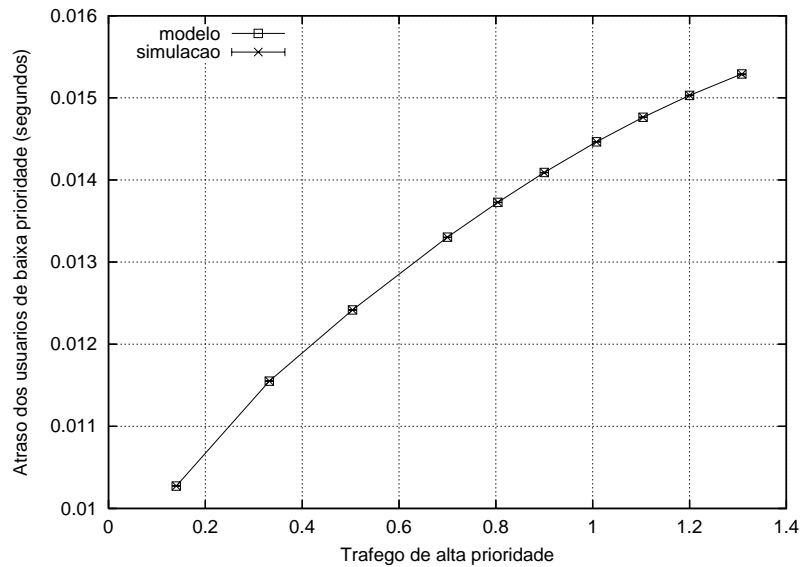


Figura 5.18: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.19

Como pode ser observado nas Figuras de 5.15 a 5.18, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$). Os limites para armazenar estas unidades de informação são especificados através de dois conjuntos de valores. O primeiro considera $B_L = 5$ e $B_H = 8$ e o segundo $B_L = 2$ e $B_H = 3$. O valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

Considerando a variação da taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b)

	ρ_b	modelo	simulação
1	0.14	1.182390217e-02	1.180020e-02
2	0.332	1.934661288e-02	1.931951e-02
3	0.504	2.846099342e-02	2.843750e-02
4	0.70	3.751036668e-02	3.749780e-02
5	0.804	4.058094313e-02	4.057200e-02
6	0.90	4.253702582e-02	4.253073e-02
7	1.008	4.404865121e-02	4.404800e-02
8	1.104	4.499159305e-02	4.499040e-02
9	1.200	4.568868282e-02	4.568480e-02
10	1.308	4.627585215e-02	4.627580e-02

Tabela 5.20: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_a = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

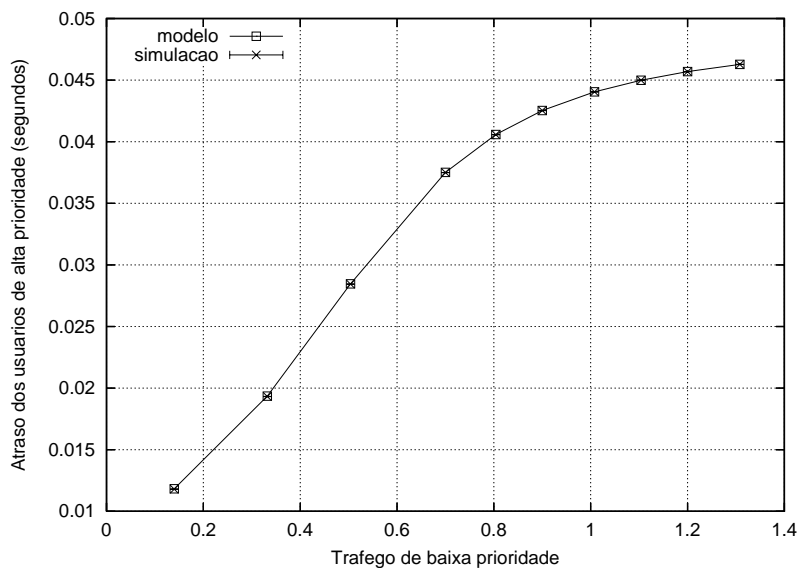


Figura 5.19: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.20

	ρ_b	modelo	simulação
1	0.14	1.255757877e-02	1.256380e-02
2	0.332	1.844785962e-02	1.844235e-02
3	0.504	2.498355477e-02	2.500754e-02
4	0.70	3.175233852e-02	3.173920e-02
5	0.804	3.426040802e-02	3.425440e-02
6	0.90	3.592735034e-02	3.592520e-02
7	1.008	3.723681514e-02	3.724060e-02
8	1.104	3.804603232e-02	3.805120e-02
9	1.200	3.862688226e-02	3.863120e-02
10	1.308	3.909248350e-02	3.909420e-02

Tabela 5.21: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/ B_H com $\rho_a = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

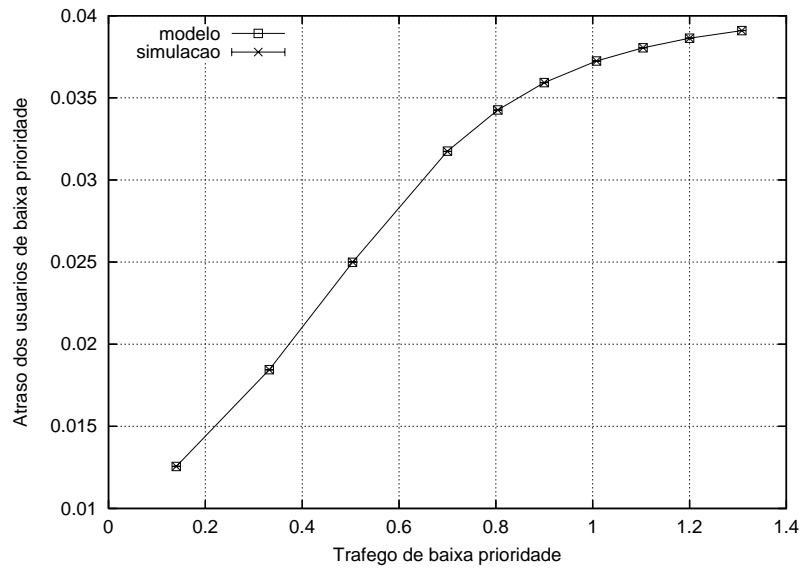


Figura 5.20: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 5.21

Como pode ser observado nas Figuras de 5.19 a 5.20, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$). Os limites para armazenar estas unidades de informação são especificados através de dois conjuntos de valores. O primeiro considera $B_L = 5$ e $B_H = 8$ e o segundo $B_L = 2$ e $B_H = 3$. O valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

Análise dos Resultados

Assim como no caso da probabilidade de perda, os gráficos de 5.11 a 5.20 indicam que os resultados obtidos para o atraso dos usuários de alta e baixa prioridade podem ser diretamente aplicados em projetos. Este fato ocorre devido à grande proximidade entre os valores teóricos e simulados.

5.2 Disciplina Priority Scheduling

Assim como foi descrito na subseção 3.3, esta disciplina armazena os tráfegos com prioridades distintas em filas separadas, sendo que os usuários de baixa prioridade somente são atendidos quando a fila que armazena as unidades de informação de alta prioridade estiver vazia. A fim de verificar a aplicabilidade do modelo analítico apresentado no capítulo 4, são considerados os sistemas GEOM/D/1/B, MMBP/D/1/B, GEOM/GEOM/1/B e MMBP/GEOM/1/B com prioridades e com chegadas em grupo. Após a especificação das Cadeias de Markov destes sistemas, calcula-se os valores para a probabilidade de perda e atraso dos usuários gerados pelas fontes.

Inicialmente, as chegadas de tráfego serão abordadas de forma genérica. Portanto, considera-se os termos a_y^a e a_z^b como as probabilidades de serem gerados y e z unidades de informação de alta e baixa prioridade em um segmento de tempo, respectivamente. Através deste raciocínio, os valores $EA r^a$ e $EA r^b$ são definidos como os respectivos números médios de usuários de alta e baixa prioridade que chegam ao sistema. A análise dos casos envolvendo fontes de Bernoulli e *MMBP* será realizada após a obtenção de expressões genéricas.

5.2.1 Características dos modelos

Devido à utilização do método matemático desenvolvido no capítulo 4, a entrada e saída de usuários segue características análogas às encontradas na seção 4.1. Desta

forma, tem-se o seguinte comportamento:

- O instante em que o sistema é observado ocorre antes do momento em que uma unidade de informação, de alta ou baixa prioridade, pode estar concluindo o seu atendimento;
- Se for observado que o sistema possui i usuários ($i \neq 0$) armazenados na fila em atendimento e ocorrer a saída do usuário em serviço, o primeiro usuário (ou grupo de usuários) que chegar nesta fila, no próximo segmento de tempo, encontrará o sistema contendo $i - 1$ unidades de informação;
- Se uma das filas que compõem o sistema estiver vazia no instante de observação e, em seguida, chegarem i usuários nesta fila, haverá i unidades de informação armazenadas quando o sistema for novamente observado no segmento de tempo consecutivo.

5.2.2 Definições dos parâmetros utilizados

A fim de obter os resultados desejados, foi necessária a utilização de vários parâmetros. Estes dados são necessários para determinar as características do sistema e facilitar a compreensão do modelo. A partir deste conceito, tem-se os seguintes valores:

n_a = número de fontes de alta prioridade;

n_b = número de fontes de baixa prioridade;

B_L = número máximo de usuários de baixa prioridade que podem ser aceitos na fila;

B_H = número máximo de usuários de alta prioridade que podem ser aceitos na fila;

$X^a(i)$ = probabilidade de haver i usuários de alta prioridade armazenados na fila;

$X^b(i)$ = probabilidade de haver i usuários de baixa prioridade armazenados na fila;

5.2.3 Modelagem Analítica

Como o funcionamento do sistema abordado é diferente do especificado para a disciplina *Threshold Dropping*, a Cadeia Markov desenvolvida possui características particulares. Ao realizar uma análise, verifica-se que a representação da disciplina *Priority Scheduling* está associada à duas variáveis de estado, que indicam as respectivas quantidades de usuários de alta e baixa prioridade armazenados nas filas existentes. Desta forma, encontra-se o seguinte o estado global do sistema:

$$q(i, j) = P(X^a = i, X^b = j)$$

Assim como no capítulo 4, antes de obter os valores referentes à qualidade de serviço, deve-se definir as probabilidades de transição dos estados da Cadeia de Markov. A partir destas informações e do método descrito no apêndice A são obtidos os resultados para $X^a(i)$ e $X^b(i)$ em regime estacionário e, em seguida, as expressões para a probabilidade de perda e atraso das unidades de informação.

Devido à analogia com os modelos utilizados para estudar a disciplina *Threshold Dropping*, serão considerados dois tipos de distribuição para os tempos de atendimento dos usuários. Desta forma, a análise será dividida nos seguintes casos:

1. sistemas com tempo de serviço determinístico;
2. sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço.

A partir desta separação, define-se que no item 1 ocorre a saída do usuário em serviço após cada segmento de tempo. Na abordagem do item 2 o término do atendimento de uma unidade de informação ocorre com probabilidade β após um segmento de tempo. As definições formais dos intervalos de serviço abordados podem ser encontradas nas subseções 4.3.1 e 4.5.1.

Sistemas com tempo de serviço determinístico

Em termos de organização, as probabilidades de transição de estado serão separadas em grupos. Após a apresentação de cada caso, será fornecida uma breve explicação das expressões encontradas. A divisão será realizada de acordo com a ocupação inicial e final da fila de alta prioridade após um segmento de tempo. Desta forma, sendo $\pi_{t_i^a t_f^a}$ a probabilidade dos números de usuários nas filas de alta e baixa prioridade terem seus valores alterados de t_i^a para t_f^a e de t_i^b para t_f^b , respectivamente, encontra-se o seguinte algoritmo:

- Para $t_i^a = 0$ e $t_f^a \geq 0$

Se $t_f^a < B_H$:

Caso $t_i^b = t_f^b = 0$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a a_0^b; \quad (5.1)$$

Caso $t_i^b = 0$, $t_f^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a a_{t_f^b}^b \quad (5.2)$$

Caso $t_i^b = 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.3)$$

Caso $t_f^b = t_i^b - 1$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a a_0^b; \quad (5.4)$$

Caso $t_f^b \geq t_i^b$, $t_i^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a a_{t_f^b - t_i^b + 1}^b; \quad (5.5)$$

Caso $t_i^b > 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b + 1}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.6)$$

Se $t_f^a = B_H$:

Caso $t_i^b = t_f^b = 0$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) a_0^b; \quad (5.7)$$

Caso $t_i^b = 0$, $t_f^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) a_{t_f^b}^b \quad (5.8)$$

Caso $t_i^b = 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.9)$$

Caso $t_f^b = t_i^b - 1$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) a_0^b; \quad (5.10)$$

Caso $t_f^b \geq t_i^b$, $t_i^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) a_{t_f^b - t_i^b + 1}^b; \quad (5.11)$$

Caso $t_i^b > 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) \left(\sum_{z=t_f^b-t_i^b+1}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.12)$$

Como pode ser observado, o tráfego de baixa prioridade é servido como se estivesse em uma disciplina *Drop Tail*. Este fato ocorre, pois, no caso abordado somente existe a possibilidade de usuários de baixa prioridade estarem armazenados no sistema antes da entrada de unidades de informação. Este funcionamento segue a definição da disciplina *Priority Scheduling* e está de acordo com as características mencionadas na subseção 5.2.1. Desta forma, todos os usuários de alta prioridade são diretamente armazenados na fila.

- Para $t_i^a > 0$ e $t_f^a = t_i^a - 1$

Caso $t_i^b = t_f^b = 0$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a a_0^b \quad (5.13)$$

Caso $t_i^b = 0$, $t_f^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a a_{t_f^b}^b; \quad (5.14)$$

Caso $t_i^b = 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.15)$$

Caso $t_f^b = t_i^b - 1$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = 0; \quad (5.16)$$

Caso $t_f^b \geq t_i^b$, $t_i^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a a_{t_f^b-t_i^b}^b; \quad (5.17)$$

Caso $t_i^b > 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a \left(\sum_{z=t_f^b-t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.18)$$

A partir deste ponto, quando ocorre a relação $t_i^a > 0$, a fila destinada ao fluxo de alta prioridade é tratada de acordo com a disciplina *Drop Tail*. Desta forma, quando $t_f^a = t_i^a - 1$, não ocorre a chegada do tráfego de alta prioridade.

Como pode ser observado, os usuários de baixa prioridade admitidos são simplesmente armazenados, sem haver atendimento. Durante a análise das expressões,

verifica-se que a perda dos usuários de baixa prioridade, associada ao caso $t_f^b = B_L$, é referenciada no termo $\sum_{z=t_f^b-t_i^b}^{n_b} a_z^b$.

- Para $t_i^a > 0$ e $t_f^a \geq t_i^a$

Se $t_f^a < B_H$:

Caso $t_i^b=t_f^b=0$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a-t_i^a+1}^a a_0^b \quad (5.19)$$

Caso $t_i^b=0, t_f^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a-t_i^a+1}^a a_{t_f^b}^b; \quad (5.20)$$

Caso $t_i^b=0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a-t_i^a+1}^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right); \quad (5.21)$$

Caso $t_f^b=t_i^b-1$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = 0; \quad (5.22)$$

Caso $t_f^b \geq t_i^b, t_i^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a-t_i^a+1}^a a_{t_f^b-t_i^b}^b; \quad (5.23)$$

Caso $t_i^b > 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a-t_i^a+1}^a \left(\sum_{z=t_f^b-t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.24)$$

Se $t_f^a = B_H$:

Caso $t_i^b=t_f^b=0$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \sum_{y=t_f^a-t_i^a+1}^{n_a} a_y^a a_0^b \quad (5.25)$$

Caso $t_i^b=0, t_f^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \sum_{y=t_f^a-t_i^a+1}^{n_a} a_y^a a_{t_f^b}^b; \quad (5.26)$$

Caso $t_i^b=0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \sum_{y=t_f^a-t_i^a+1}^{n_a} a_y^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right); \quad (5.27)$$

Caso $t_f^b=t_i^b-1$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = 0; \quad (5.28)$$

Caso $t_f^b \geq t_i^b, t_i^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \sum_{y=t_f^a-t_i^a+1}^{n_a} a_y^a a_{t_f^b-t_i^b}^b; \quad (5.29)$$

$$\text{Caso } t_i^b > 0 \text{ e } t_f^b = B_L$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \sum_{y=t_f^a-t_i^a+1}^{n_a} a_y^a \left(\sum_{z=t_f^b-t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.30)$$

Nesta última análise, assim como na anterior, enquanto o tráfego de alta prioridade é tratado de acordo com a disciplina *Drop Tail*, o tráfego de baixa prioridade é diretamente armazenado. É possível observar que a perda dos usuários de alta prioridade é desconsiderada quando aborda-se a relação $t_f^a < B_H$. Este fato não ocorre durante a análise de $t_f^a = B_H$. Neste último caso, o termo $\sum_{y=t_f^a-t_i^a+1}^{n_a} a_y^a$ é utilizado para referenciar esta perda.

A disposição dos valores de $\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a}$ na matriz de transição de estados segue um esquema análogo ao aplicado na seção 4.4. Em outras palavras, utiliza-se uma matriz formada de $(B_H + 1) \times (B_H + 1)$ blocos, sendo que dentro de cada bloco existem $(B_L + 1) \times (B_L + 1)$ elementos.

Sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço

Neste ponto, a análise será realizada a partir de uma analogia com o modelo que considera um tempo de serviço determinístico para o atendimento dos usuários. Seguindo este raciocínio, tem-se que $\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a}$ representa a probabilidade dos números de usuários nas filas de alta e baixa prioridade terem seus valores alterados de t_i^a para t_f^a e de t_i^b para t_f^b , respectivamente. Assim como no trabalho de Sahu [18], aborda-se o caso em que as prioridades de descarte são tratadas de forma preemptiva [46, 47, 14].

- Para $t_i^a = 0$ e $t_f^a \geq 0$

Se $t_f^a < B_H$:

$$\text{Caso } t_i^b = t_f^b = 0$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a a_0^b; \quad (5.31)$$

$$\text{Caso } t_i^b = 0, t_f^b > 0 \text{ e } t_f^b < B_L$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a a_{t_f^b}^b \quad (5.32)$$

$$\text{Caso } t_i^b = 0 \text{ e } t_f^b = B_L$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.33)$$

$$\text{Caso } t_f^b = t_i^b - 1$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a a_0^b \beta; \quad (5.34)$$

$$\text{Caso } t_f^b \geq t_i^b, t_i^b > 0 \text{ e } t_f^b < B_L$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a a_{t_f^b - t_i^b + 1}^b \beta + a_{t_f^a}^a a_{t_f^b - t_i^b}^b (1 - \beta); \quad (5.35)$$

$$\text{Caso } t_i^b > 0 \text{ e } t_f^b = B_L$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a}^a \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b + 1}^{n_b} a_z^b \right) \beta + a_{t_f^a}^a \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) (1 - \beta) \quad (5.36)$$

Se $t_f^a = B_H$:

$$\text{Caso } t_i^b = t_f^b = 0$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) a_0^b; \quad (5.37)$$

$$\text{Caso } t_i^b = 0, t_f^b > 0 \text{ e } t_f^b < B_L$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) a_{t_f^b}^b \quad (5.38)$$

$$\text{Caso } t_i^b = 0 \text{ e } t_f^b = B_L$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) \quad (5.39)$$

$$\text{Caso } t_f^b = t_i^b - 1$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) a_0^b \beta; \quad (5.40)$$

$$\text{Caso } t_f^b \geq t_i^b, t_i^b > 0 \text{ e } t_f^b < B_L$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) a_{t_f^b - t_i^b + 1}^b \beta + \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) a_{t_f^b - t_i^b}^b (1 - \beta); \quad (5.41)$$

$$\text{Caso } t_i^b > 0 \text{ e } t_f^b = B_L$$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b + 1}^{n_b} a_z^b \right) \beta + \left(\sum_{y=t_f^a}^{n_a} a_y^a \right) \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) (1 - \beta) \quad (5.42)$$

Neste caso, como a fila destinada aos usuários de alta prioridade está inicialmente vazia, o parâmetro β está associado ao serviço das unidades de informação de baixa prioridade armazenadas. Desta forma, quando ocorre uma modificação no número de usuários na fila que comporta o tráfego de baixa prioridade, enquanto o termo β é utilizado para representar a probabilidade de ocorrer o término do atendimento do usuário em serviço, o fator $1 - \beta$ está associado à probabilidade deste evento não ocorrer.

- Para $t_i^a > 0$ e $t_f^a = t_i^a - 1$

Caso $t_i^b = t_f^b = 0$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a a_0^b \beta; \quad (5.43)$$

Caso $t_i^b = 0$, $t_f^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a a_{t_f^b}^b \beta; \quad (5.44)$$

Caso $t_i^b = 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) \beta; \quad (5.45)$$

Caso $t_f^b = t_i^b - 1$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = 0; \quad (5.46)$$

Caso $t_f^b \geq t_i^b$, $t_i^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a a_{t_f^b - t_i^b}^b \beta; \quad (5.47)$$

Caso $t_i^b > 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_0^a \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) \beta; \quad (5.48)$$

Neste conjunto de resultados para $\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a}$, a probabilidade $1 - \beta$ não é considerada pois aborda-se a finalização do serviço da unidade de informação de alta prioridade em atendimento. A partir deste ponto, o valor β está associado à saída dos usuários de alta prioridade em serviço. Este fato ocorre, pois, a fila destinada à este tráfego está inicialmente ocupada, ou seja, $t_i^a > 0$. Devido a esta característica, todos os usuários de baixa prioridade são diretamente armazenados.

- Para $t_i^a > 0$ e $t_f^a \geq t_i^a$

Se $t_f^a < B_H$:

Caso $t_i^b = t_f^b = 0$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a - t_i^a + 1}^a a_0^b \beta + a_{t_f^a - t_i^a}^a a_0^b (1 - \beta); \quad (5.49)$$

Caso $t_i^b = 0$, $t_f^b > 0$ e $t_f^b < B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a - t_i^a + 1}^a a_{t_f^b}^b \beta + a_{t_f^a - t_i^a}^a a_{t_f^b}^b (1 - \beta); \quad (5.50)$$

Caso $t_i^b = 0$ e $t_f^b = B_L$

$$\pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} = a_{t_f^a - t_i^a + 1}^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) \beta + a_{t_f^a - t_i^a}^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) (1 - \beta); \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso } t_f^b = t_i^b - 1 \\ \pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} &= 0; \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso } t_f^b \geq t_i^b, t_i^b > 0 \text{ e } t_f^b < B_L \\ \pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} &= a_{t_f^a - t_i^a + 1}^a a_{t_f^b - t_i^b}^b \beta + a_{t_f^a - t_i^a}^a a_{t_f^b - t_i^b}^b (1 - \beta); \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso } t_i^b > 0 \text{ e } t_f^b = B_L \\ \pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} &= a_{t_f^a - t_i^a + 1}^a \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) \beta + a_{t_f^a - t_i^a}^a \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) (1 - \beta) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Se $t_f^a = B_H$:

$$\begin{aligned} \text{Caso } t_i^b = t_f^b = 0 \\ \pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} &= \sum_{y=t_f^a - t_i^a + 1}^{n_a} a_y^a a_0^b \beta + \sum_{y=t_f^a - t_i^a}^{n_a} a_y^a a_0^b (1 - \beta); \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso } t_i^b = 0, t_f^b > 0 \text{ e } t_f^b < B_L \\ \pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} &= \sum_{y=t_f^a - t_i^a + 1}^{n_a} a_y^a a_{t_f^b}^b \beta + \sum_{y=t_f^a - t_i^a}^{n_a} a_y^a a_{t_f^b}^b (1 - \beta); \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso } t_i^b = 0 \text{ e } t_f^b = B_L \\ \pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} &= \sum_{y=t_f^a - t_i^a + 1}^{n_a} a_y^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) \beta + \sum_{y=t_f^a - t_i^a}^{n_a} a_y^a \left(\sum_{z=t_f^b}^{n_b} a_z^b \right) (1 - \beta); \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso } t_f^b = t_i^b - 1 \\ \pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} &= 0; \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso } t_f^b \geq t_i^b, t_i^b > 0 \text{ e } t_f^b < B_L \\ \pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} &= \sum_{y=t_f^a - t_i^a + 1}^{n_a} a_y^a a_{t_f^b - t_i^b}^b \beta + \sum_{y=t_f^a - t_i^a}^{n_a} a_y^a a_{t_f^b - t_i^b}^b (1 - \beta); \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso } t_i^b > 0 \text{ e } t_f^b = B_L \\ \pi_{t_i^b t_f^b}^{t_i^a t_f^a} &= \sum_{y=t_f^a - t_i^a + 1}^{n_a} a_y^a \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) \beta + \sum_{y=t_f^a - t_i^a}^{n_a} a_y^a \left(\sum_{z=t_f^b - t_i^b}^{n_b} a_z^b \right) (1 - \beta); \end{aligned} \quad (5.60)$$

Este último conjunto de equações representa os casos mais complexos. Este fato ocorre, pois, durante transição no número de usuários de alta prioridade armazenados, considera-se as probabilidades de ocorrer ou não o término do atendimento da unidade de informação em serviço. Portanto, os valores β e $1 - \beta$ são utilizados para representar estas probabilidades, respectivamente. Assim como no caso onde $t_f^a = t_i^a - 1$, todos os usuários de baixa prioridade são diretamente armazenados.

É importante mencionar que outras abordagens deste sistema foram desenvolvidas na literatura. Nas referências [46, 47], utiliza-se o conceito de superclasses para realizar a modelagem analítica. Em outras palavras, dado que A^{C_m} representa o número de usuários da superclasse de prioridade m que foi gerado pelas fontes, define-se a relação $A^{C_m} = \sum_{i=1}^m A^i$. Neste caso, o valor A^i está associado à quantidade de unidades de informação com classe de prioridade i que chega no sistema.

5.2.4 Resultados para os sistemas com distribuição GEOM para os intervalos entre chegadas

Neste caso, como as variáveis de estado necessárias para definir este sistema são os números de usuários armazenados nas filas de alta e baixa prioridade, as expressões especificadas para $\pi_{t_i^a t_f^a}^{t_i^b t_f^b}$ (na subseção 5.2.3) determinam a matriz de transição de estado. Desta forma, o funcionamento da disciplina *Priority Scheduling* é completamente definido através das seguintes expressões:

$$\alpha_y^a = \binom{n_a}{y} p_a^y (1 - p_a)^{n_a - y} \quad (5.61)$$

$$\alpha_z^b = \binom{n_b}{z} p_b^z (1 - p_b)^{n_b - z} \quad (5.62)$$

onde,

p_a = probabilidade de uma fonte de Bernoulli gerar um usuário de alta prioridade;

p_b = probabilidade de uma fonte de Bernoulli gerar um usuário de baixa prioridade;

É possível verificar que as taxas médias de chegada das unidades de informação de alta e baixa prioridade (ρ_a e ρ_b) são definidas pelas expressões $\rho_a = n_a p_a$ e $\rho_b = n_b p_b$.

5.2.5 Resultados para os sistemas com fontes MMBP

Assim como foi abordado no capítulo 4, neste caso também deve-se considerar as variáveis de estado relacionadas ao número de fontes de alta e baixa prioridade

no estado E_1 . Como esta característica reflete nos elementos da matriz de transição de estados, aplica-se a seguinte expressão:

$$\prod_{\substack{t_i^a t_f^a \\ t_i^b t_f^b \\ hc \\ cd}} = \pi_{\substack{t_i^a t_f^a \\ t_i^b t_f^b}}^{hc} Q_{hk}^a Q_{cd}^b \quad (5.63)$$

Onde,

$\prod_{\substack{t_i^a t_f^a \\ t_i^b t_f^b \\ hc \\ cd}} =$ probabilidade de todas as variáveis de estado do sistema sofrerem transição. Neste caso, as respectivas quantidades de usuários de alta e baixa prioridade armazenadas nas filas tem seus valores alterados de t_i^a para t_f^a e de t_i^b para t_f^b . Em relação ao número de fontes de alta e baixa prioridade no estado E_1 , a mudança ocorre dos valores h para k e c para d , respectivamente.

$Q_{hk}^a =$ probabilidade da variável de estado referente à quantidade de fontes de alta prioridade no período E_1 ter seu valor alterado, em um segmento de tempo, de h para k ;

$Q_{cd}^b =$ probabilidade da variável de estado referente à quantidade de fontes de baixa prioridade no período E_1 ter seu valor alterado, em um segmento de tempo, de c para d ;

$\pi_{\substack{t_i^a t_f^a \\ t_i^b t_f^b}}^{hc} =$ probabilidade de haver uma alteração de t_i^a para t_f^a e de t_i^b para t_f^b nas variáveis de estado relacionadas à ocupação das filas de alta e baixa prioridade, respectivamente. Neste caso, existem h fontes de alta prioridade e c fontes de baixa prioridade no período E_1 .

Pode-se verificar que as probabilidades Q_{hk}^a e Q_{cd}^b são especificados na seção 4.4.

Assim como foi definido no capítulo 4, a chegada de usuários está relacionada às expressões para $a_z^{n_b^1}$ e $a_y^{n_a^1}$. Estes valores representam as probabilidades de, em um segmento de tempo, serem gerados z e y usuários de baixa e alta prioridade dado que existem n_b^1 e n_a^1 fontes de baixa e alta prioridade no estado E_1 , respectivamente. Através deste conceito, utiliza-se as mesmas equações apresentadas em 4.20 e 4.21, ou seja:

$$a_z^{n_b^1} = \sum_{k=0}^z \binom{n_b^1}{k} (p_1^b)^k (1 - p_1^b)^{n_b^1 - k} \binom{n_b^1 - n_b^1}{z - k} (p_2^b)^{z - k} (1 - p_2^b)^{n_b^1 - z + k} \quad (5.64)$$

$$a_y^{n_a^1} = \sum_{k=0}^y \binom{n_a^1}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{n_a^1-k} \binom{n_a - n_a^1}{y-k} (p_2^a)^{y-k} (1-p_2^a)^{n_a - n_a^1 - y + k} \quad (5.65)$$

No caso dos valores de a_y^a e a_z^b , encontra-se:

$$a_z^b = \sum_{l=0}^{n_b} \sum_{k=0}^z \binom{l}{k} (p_1^b)^k (1-p_1^b)^{l-k} \binom{n_b - l}{z-k} (p_2^b)^{z-k} (1-p_2^b)^{n_b - l - z + k} F_1^b(l) \quad (5.66)$$

$$a_y^a = \sum_{l=0}^{n_a} \sum_{k=0}^y \binom{l}{k} (p_1^a)^k (1-p_1^a)^{l-k} \binom{n_a - l}{y-k} (p_2^a)^{y-k} (1-p_2^a)^{n_a - l - y + k} F_1^a(l) \quad (5.67)$$

As funções $F_1^a(l)$ e $F_1^b(l)$ representam as probabilidades de l fontes de alta e baixa prioridade estarem no estado E_1 , respectivamente. Pode-se verificar que as expressões para a_y^a e a_z^b são idênticas às definidas na seção 4.4.

Através de uma análise, observa-se que a organização dos elementos $\Pi_{\substack{t_i^a & t_f^a \\ t_i^b & t_f^b \\ h_k & c_d}}$ na matriz de transição de estados segue um esquema análogo ao especificado no capítulo 4 para o sistema $MMBP/D/1/B_H$.

As taxas médias de chegada dos usuários de alta e baixa prioridade (ρ_a e ρ_b) são definidas pelas equações:

$$\rho_a = n_a \left(p_2^a \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} + p_1^a \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \right) \quad (5.68)$$

$$\rho_b = n_b \left(p_2^b \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} + p_1^b \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \right) \quad (5.69)$$

5.2.6 Obtenção das expressões para probabilidade de perda dos usuários de alta e baixa prioridade

Assim como no capítulo 4, os resultados relacionados à esta qualidade de serviço são obtidos considerando-se o descarte de um usuário teste. Inicialmente, será desenvolvida a expressão para o tráfego de alta prioridade e, em seguida, para o de baixa prioridade.

Como o tráfego de alta prioridade é atendido da mesma forma que em uma disciplina *Drop Tail*, encontra-se a mesma expressão utilizada nesta estrutura para a probabilidade de perda. Desta forma, os fatores a serem considerados são: o número de unidades de informação de alta prioridade gerado no mesmo segmento

de tempo e a probabilidade do usuário teste ser descartado dado que a ocupação inicial da fila (i) e a quantidade de tráfego de entrada são definidos.

Em termos de organização, será realizada uma análise evolutiva, ou seja, inicialmente serão desenvolvidas expressões com características mais simples e, em seguida, serão abordados casos mais complexos. Desta forma, a obtenção das expressões para probabilidade de perda será dividida em dois casos:

- sistemas com tempo de serviço determinístico;
- sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço.

Em cada um destes sistemas abordados, será inicialmente desenvolvida a expressão para a probabilidade de perda dos usuários de alta prioridade e, em seguida, dos de baixa prioridade.

Sistemas com tempo de serviço determinístico

Através da união destes fatores e da utilização do parâmetro $X^a(i)$, definido na subseção 5.2.2, tem-se a seguinte resultado para a probabilidade de perda dos usuários de alta prioridade:

- Se $B_H - n_a \geq 0$:

$$P_{perda_{ap}} = \sum_{i=B_H-n_a+2}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+2}^{n_a} \left(\left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \frac{y a_y^a}{E A r^a} X^a(i) \right) \quad (5.70)$$

- Se $B_H - n_a < 0$:

$$P_{perda_{ap}} = \sum_{i=1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+2}^{n_a} \left(\left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \frac{y a_y^a}{E A r^a} X^a(i) \right) + \sum_{y=\max(1, B_H-n_a+1)}^{n_a} \left(\left(\frac{y-B_H}{y} \right) \frac{y a_y^a}{E A r^a} X^a(0) \right) \quad (5.71)$$

Neste algoritmo, a equação definida em 5.71 refere-se ao resultado em 5.70 acrescido do termo $\sum_{y=\max(1, B_H-n_a+1)}^{n_a} \left(\left(\frac{y-B_H}{y} \right) \frac{y a_y^a}{E A r^a} X^a(0) \right)$. Este valor representa a probabilidade de perda da unidade de informação teste quando a fila que a armazena está inicialmente vazia ($i = 0$).

Como pode ser observado, após obter a distribuição de probabilidade dos estados em regime estacionário, a ocupação da fila de alta prioridade é calculada pela expressão $X^a(i) = \sum_{k=0}^{B_L} q(i, k)$.

Através de uma análise, é possível encontrar uma analogia desta probabilidade de perda com a expressão 4.71, desenvolvida no capítulo 4. Este fato caracteriza a aplicação do método matemático desenvolvido na seção 4.7 em outras disciplinas de fila.

No caso da probabilidade de perda dos usuários de baixa prioridade, além de considerar fatores análogos aos definidos para as expressões 5.70 e 5.71, utiliza-se a ocupação da fila de alta prioridade. Este fato ocorre, pois, esta fila somente é atendida se não houver usuários de alta prioridade armazenados. Desta forma, encontra-se o seguinte algoritmo:

- Se $B_L - n_b \geq 0$:

$$P_{perda_{bp}} = \sum_{i=B_L-n_b+2}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+2}^{n_b} \left(\left(\frac{i+z-B_L-1}{z} \right) \frac{za_z^b}{EA r^b} q(0, i) \right) + \sum_{i=B_L-n_b+1}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+1}^{n_b} \left(\left(\frac{i+z-B_L}{z} \right) \frac{za_z^b}{EA r^b} (X^b(i) - q(0, i)) \right) \quad (5.72)$$

- Se $B_L - n_b < 0$:

$$P_{perda_{bp}} = \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+2}^{n_b} \left(\left(\frac{i+z-B_L-1}{z} \right) \frac{za_z^b}{EA r^b} q(0, i) \right) + \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+1}^{n_b} \left(\left(\frac{i+z-B_L}{z} \right) \frac{za_z^b}{EA r^b} (X^b(i) - q(0, i)) \right) + \sum_{z=\max(1, B_L-n_b+1)}^{n_b} \left(\left(\frac{z-B_L}{z} \right) \frac{za_z^b}{EA r^b} X^b(0) \right) \quad (5.73)$$

Neste algoritmo, a equação definida em 5.73 refere-se ao resultado em 5.72 acrescido do termo $\sum_{z=\max(1, B_L-n_b+1)}^{n_b} \left(\left(\frac{z-B_L}{z} \right) \frac{za_z^b}{EA r^b} X^b(0) \right)$. Este valor representa a probabilidade de perda da unidade de informação teste quando a fila que a armazena está inicialmente vazia ($i = 0$).

Como pode ser observado, a expressão 5.72 é dividida em duas partes. Enquanto a primeira analisa o caso em que não existem usuários de alta prioridade armazenados, a segunda considera que a fila de alta prioridade está sendo atendida antes da entrada do usuário teste. Desta forma, encontra-se os seguintes termos:

1. considerando que a fila de alta prioridade está vazia:

$$P_{perda_{bp}} = \sum_{i=B_L-n_b+2}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+2}^{n_b} \left(\left(\frac{i+z-B_L-1}{z} \right) \frac{za_z^b}{EAr^b} q(0, i) \right)$$

2. considerando que a fila de alta prioridade está ocupada:

$$P_{perda_{bp}} = \sum_{i=B_L-n_b+2}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+2}^{n_b} \left(\left(\frac{i+z-B_L}{z} \right) \frac{za_z^b}{EAr^b} (X^b(i) - q(0, i)) \right)$$

Através de uma análise, verifica-se que a expressão apresentada no item 1 descreve o mesmo funcionamento encontrado para a fila de alta prioridade. Este fato ocorre, pois, somente existem usuários de baixa prioridade armazenados. A probabilidade deste evento ocorrer é representada pelo termo $q(0, i)$.

No caso do termo encontrado no item 2, o tráfego de baixa prioridade é diretamente armazenado no sistema. Esta característica ocorre devido à ocupação existente na fila de alta prioridade. A probabilidade deste evento ocorrer é representada pelo termo $X^b(i) - q(0, i)$, sendo que o valor de $X^b(i)$ é definido pela expressão $X^b(i) = \sum_{k=0}^{B_H} q(k, i)$.

Sistemas com distribuição geométrica para o tempo de serviço

Como o tráfego de alta prioridade é atendido da mesma forma que em um sistema sem prioridades de descarte e com chegadas em grupo, encontra-se a mesma expressão utilizada nesta estrutura para a probabilidade de perda. Desta forma, através de uma analogia com as expressões 5.70 e 5.71, tem-se a seguinte resultado:

Para os usuários de alta prioridade:

- Se $B_H - n_a \geq 0$:

$$P_{perda_{ap}} = \left(\sum_{i=B_H-n_a+2}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+2}^{n_a} \left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \frac{ya_y^a}{EAr^a} X^a(i) \right) \beta +$$

$$\left(\sum_{i=B_H-n_a+1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+1}^{n_a} \left(\frac{i+y-B_H}{y} \right) \frac{y a_y^a}{E A r^a} X^a(i) \right) (1-\beta) \quad (5.74)$$

- Se $B_H - n_a < 0$:

$$\begin{aligned} P_{perda_{ap}} = & \left(\sum_{i=1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+2}^{n_a} \left(\frac{i+y-B_H-1}{y} \right) \frac{y a_y^a}{E A r^a} X^a(i) \right) \beta + \\ & \left(\sum_{i=1}^{B_H} \sum_{y=B_H-i+1}^{n_a} \left(\frac{i+y-B_H}{y} \right) \frac{y a_y^a}{E A r^a} X^a(i) \right) (1-\beta) + \\ & \sum_{y=B_H+1}^{n_a} \left(\left(\frac{y-B_H}{y} \right) \frac{y a_y^a}{E A r^a} X^a(0) \right) \end{aligned} \quad (5.75)$$

No caso da probabilidade de perda dos usuários de baixa prioridade, através de uma analogia com as expressões 5.72 e 5.73, encontra-se o seguinte algoritmo:

Para os usuários de baixa prioridade:

- Se $B_L - n_b \geq 0$:

$$\begin{aligned} P_{perda_{bp}} = & \left(\sum_{i=B_L-n_b+2}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+2}^{n_b} \left(\frac{i+z-B_L-1}{z} \right) \frac{z a_z^b}{E A r^b} q(0, i) \right) \beta + \\ & \left(\sum_{i=B_L-n_b+1}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+1}^{n_b} \left(\frac{i+z-B_L}{z} \right) \frac{z a_z^b}{E A r^b} q(0, i) \right) (1-\beta) + \\ & \sum_{i=B_L-n_b+1}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+1}^{n_b} \left(\left(\frac{i+z-B_L}{z} \right) \frac{z a_z^b}{E A r^b} (X^b(i) - q(0, i)) \right) \end{aligned} \quad (5.76)$$

- Se $B_L - n_b < 0$:

$$\begin{aligned} P_{perda_{bp}} = & \left(\sum_{i=1}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+2}^{n_b} \left(\frac{i+z-B_L-1}{z} \right) \frac{z a_z^b}{E A r^b} q(0, i) \right) \beta + \\ & \left(\sum_{i=1}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+1}^{n_b} \left(\frac{i+z-B_L}{z} \right) \frac{z a_z^b}{E A r^b} q(0, i) \right) (1-\beta) + \\ & \sum_{i=1}^{B_L} \sum_{z=B_L-i+1}^{n_b} \left(\left(\frac{i+z-B_L}{z} \right) \frac{z a_z^b}{E A r^b} (X^b(i) - q(0, i)) \right) + \\ & \sum_{z=B_L+1}^{n_b} \left(\left(\frac{z-B_L}{z} \right) \frac{z a_z^b}{E A r^b} X^b(0) \right) \end{aligned} \quad (5.77)$$

5.2.7 Obtenção das expressões para atraso dos usuários de alta e baixa prioridade

Em relação à esta qualidade de serviço, como os usuários de alta e baixa prioridade são armazenados em filas diferentes, utiliza-se o teorema de Little. Desta forma, obtém-se as seguintes expressões:

$$Atraso_{ap} = \frac{iX^a(i)}{\rho_a(1 - P_{perda_{ap}})} \quad (5.78)$$

$$Atraso_{bp} = \frac{iX^b(i)}{\rho_b(1 - P_{perda_{bp}})} \quad (5.79)$$

Onde,

$$X^a(i) = \sum_{k=0}^{B_L} q(i, k)$$

$$X^b(i) = \sum_{k=0}^{B_H} q(k, i)$$

$$q(i, j) = P(X^a = i, X^b = j)$$

Considera-se que ρ_a e ρ_b representam as respectivas taxas médias de usuários gerados pelas fontes de alta e baixa prioridade.

Como pode ser observado, as definições destes resultados independem da distribuição dos intervalos de serviço. Desta forma, as expressões obtidas nesta subseção podem ser diretamente utilizadas nos sistemas envolvendo tempo de serviço determinístico e nos sistemas onde o tempo de atendimento é descrito por uma variável aleatória geométrica.

Neste ponto, conclui-se a modelagem analítica da disciplina *Priority Scheduling*. Como pode ser observado, novos valores de qualidade de serviço são obtidos através da metodologia aplicada no capítulo 4.

5.2.8 Resultados obtidos

Neste ponto, assim como na disciplina *Threshold Dropping*, os valores relacionados à probabilidade de perda e atraso dos fluxos de alta e baixa prioridade são obtidos do modelo analítico e comparados com simulações. A fim de descrever o sistema, utiliza-se os seguintes parâmetros: taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a), taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade

(ρ_b), número de fontes de alta prioridade (n_a), número de fontes de baixa prioridade (n_b), número máximo de usuários que podem ser armazenados na fila de alta prioridade (B_H) e número máximo de usuários que podem ser armazenados na fila de baixa prioridade (B_L). No caso das fontes MMBP, também serão incorporados os parâmetros p_{12} e p_{21} , ou seja, as probabilidades das fontes alterarem seu funcionamento do estado E_1 para E_2 e E_2 para E_1 , respectivamente. Assim como na seção 5.1.1, somente serão apresentados os resultados dos sistemas com serviço determinístico, ou seja, GEOM/D/1/B e MMBP/D/1/B. Os sistemas com tempo de atendimento com distribuição geométrica são abordados no próximo capítulo.

Com o objetivo de realizar simulações, utilizou-se um programa desenvolvido em C++ que representa o funcionamento do sistema. Foi considerado um intervalo de confiança de 95 por cento e um erro percentual menor ou igual a 2.5 por cento. Devido a precisão de diversas medidas, muitos erros percentuais ficaram abaixo do valor de 2.5 por cento. É importante mencionar que, para extrair os valores de atraso, o simulador utilizou um segmento de tempo de 8ms. O ambiente de trabalho foi constituído dos programas Maple V, aplicado na obtenção dos resultados analíticos, e Visual C++ 6.0, onde o simulador foi desenvolvido.

Em relação à ordem de apresentação, primeiramente serão avaliados os resultados relativos à probabilidade de perda e, em seguida, os associados ao atraso. Após a apresentação dos gráficos e tabelas de cada qualidade de serviço, será realizada uma análise do método matemático empregado.

No caso das fontes MMBP, além de serem aplicados os valores definidos na tabela da subseção 5.1.1, utiliza-se os seguintes valores para obter as taxas médias de chegada:

	ρ_a	p_1^a	p_2^a
1	0.2	0.10	0.10
2	0.4	0.20	0.20
3	0.6	0.60	0.10

Tabela 5.22: Relação entre as taxas médias de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a), considerando $n_a = 2$, e os valores de p_1^a e p_2^a

Resultados obtidos para probabilidade de perda no sistema $GEOM/D/1/B$:

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	0.000000000e+0	0.000000e+000
2	0.3	2.064115494e-12	0.000000e+000
3	0.5	2.323057366e-8	0.000000e+000
4	0.7	2.140523049e-5	2.155263e-005
5	0.8	3.811900486e-4	3.781334e-004
6	0.9	4.669081517e-3	4.686800e-003
7	1.0	3.125000000e-2	3.116540e-002
8	1.1	9.472924852e-2	9.478720e-002
9	1.2	1.669207934e-1	1.669978e-001
10	1.3	2.307807567e-1	2.308554e-001

Tabela 5.23: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema $GEOM/D/1/B$ com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

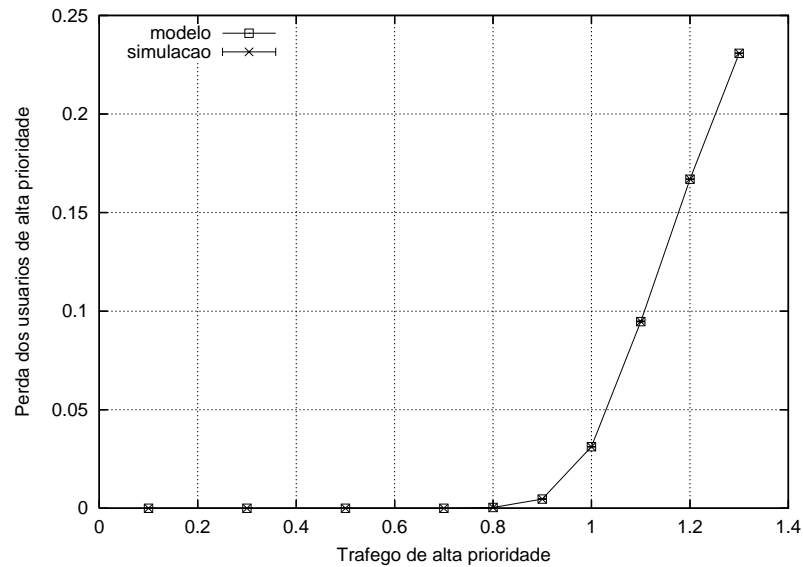


Figura 5.21: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.23

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	1.205872663e-1	1.206464e-001
2	0.3	3.029143458e-1	3.029192e-001
3	0.5	5.003457060e-1	5.002316e-001
4	0.7	7.000159549e-1	7.000136e-001
5	0.8	7.997025530e-1	7.997907e-001
6	0.9	8.957991678e-1	8.957413e-001
7	1.0	9.687501288e-1	9.687502e-001
8	1.1	9.957978317e-1	9.957884e-001
9	1.2	9.996950480e-1	9.996963e-001
10	1.3	9.999850163e-1	9.999858e-001

Tabela 5.24: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

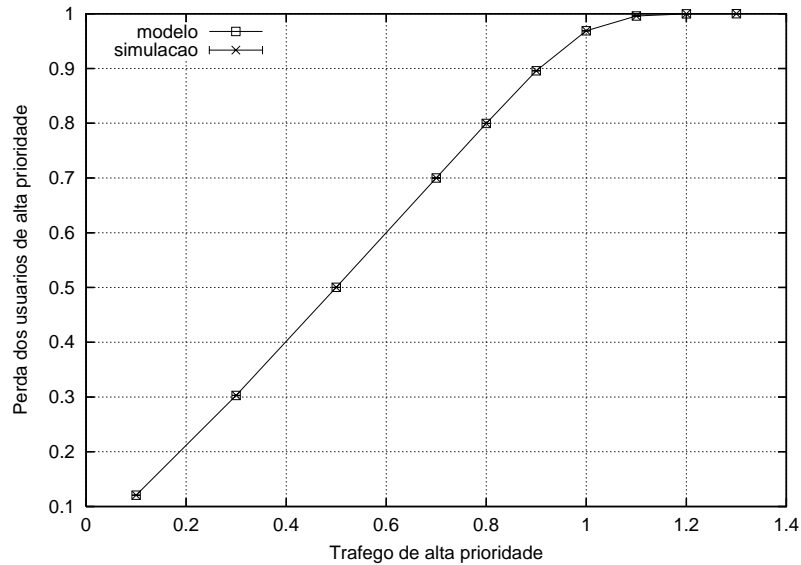


Figura 5.22: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.24

Como pode ser observado nas Figuras 5.21 e 5.22, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e os limites para armazenar as unidades de informação são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. O valor 1.0 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Resultados obtidos para probabilidade de perda no sistema MMBP/D/1/B

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	8.310592412e-13	0.000000e+000
2	0.332	1.527702694e-11	0.000000e+000
3	0.504	2.710498208e-8	0.000000e+000
4	0.70	2.140523047e-5	2.144737e-005
5	0.804	4.247701461e-4	4.252500e-004
6	0.90	4.669081515e-3	4.681572e-003
7	1.008	3.513870783e-2	3.519740e-002
8	1.104	9.766353037e-2	9.769020e-002
9	1.20	1.669207934e-1	1.669796e-001
10	1.308	2.354828763e-1	2.355742e-001

Tabela 5.25: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

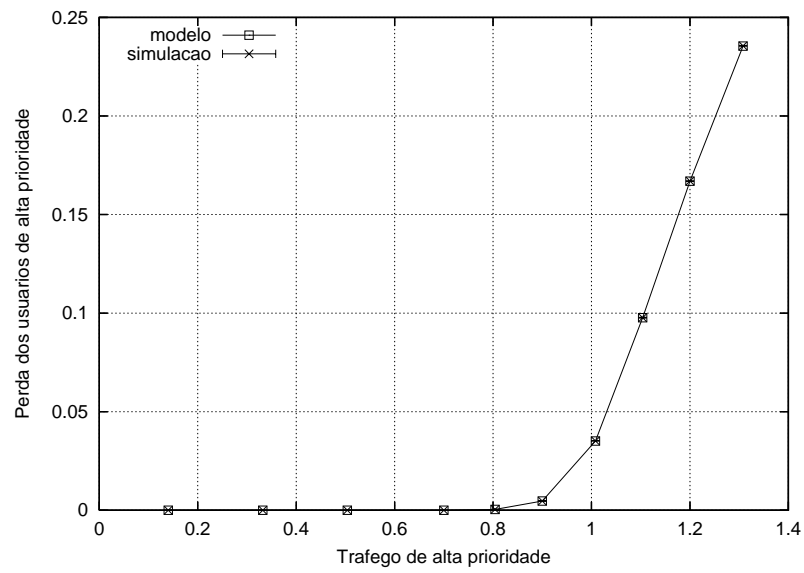


Figura 5.23: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.25

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	6.477001416e-4	6.431001e-004
2	0.332	2.522244335e-2	2.531160e-002
3	0.504	1.341470683e-1	1.343208e-001
4	0.70	4.205909050e-1	4.206944e-001
5	0.804	6.141293825e-1	6.140662e-001
6	0.90	7.939234970e-1	7.940584e-001
7	1.008	9.456427603e-1	9.456965e-001
8	1.104	9.924213763e-1	9.924313e-001
9	1.20	9.993949715e-1	9.993993e-001
10	1.308	9.999769800e-1	9.999760e-001

Tabela 5.26: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

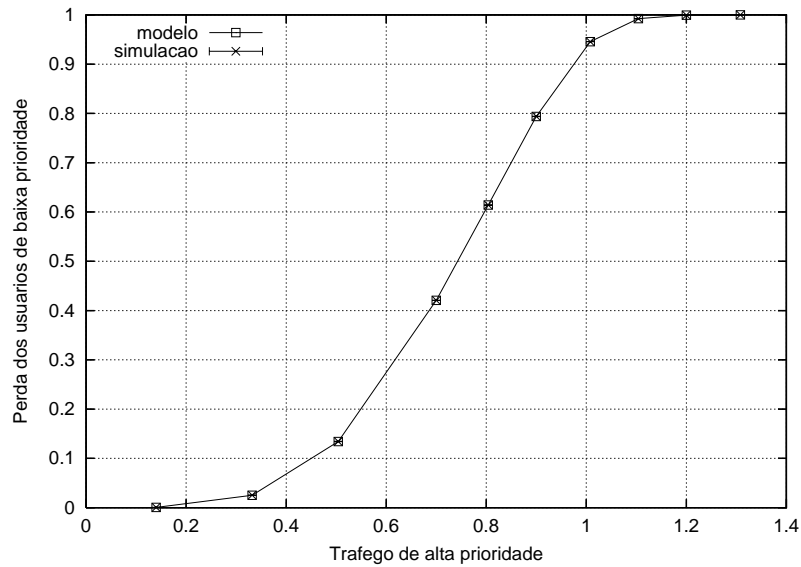


Figura 5.24: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 5.26

Como pode ser observado nas Figuras 5.21 e 5.22, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e os limites para armazenar as unidades de informação são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. O valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

Análise dos Resultados

Através de um estudo das Figuras 5.21, 5.22, 5.23 e 5.24, verifica-se que houve uma grande proximidade dos valores analíticos e dos simulados. Desta forma, conclui-se que os resultados obtidos para esta qualidade de serviço podem ser diretamente aplicados no desenvolvimento e aplicação de um projeto.

Resultados obtidos para atraso no sistema $GEOM/D/1/B$

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	8.222222224e-3	8.222200e-003
2	0.3	8.857142864e-3	8.857000e-003
3	0.5	9.999997072e-3	1.000040e-002
4	0.7	1.266220001e-2	1.265600e-002
5	0.8	1.588102336e-2	1.587510e-002
6	0.9	2.308220789e-2	2.308040e-002
7	1.0	3.690322581e-2	3.689260e-002
8	1.1	5.066869219e-2	5.067660e-002
9	1.2	5.771274465e-2	5.772120e-002
10	1.3	6.073732005e-2	6.073900e-002

Tabela 5.27: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema $GEOM/D/1/B$ com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

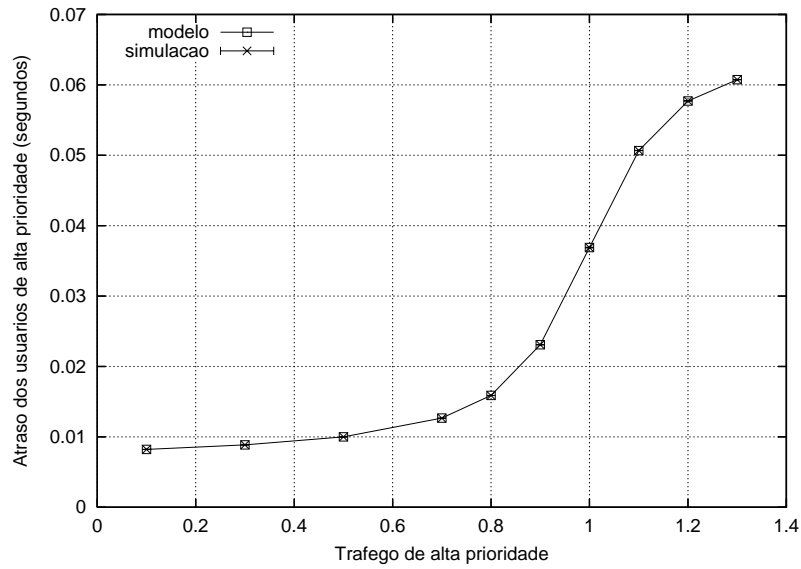


Figura 5.25: Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 5.27

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	3.277563483e-2	3.277880e-002
2	0.2	4.087330080e-2	4.087320e-002
3	0.3	4.978074517e-2	4.978060e-002
4	0.4	6.052756166e-2	6.051640e-002
5	0.5	7.472406978e-2	7.470080e-002
6	0.6	9.534830904e-2	9.536940e-002
7	0.7	1.291381023e-1	1.291176e-001
8	0.8	1.958580792e-1	1.959499e-001
9	0.9	3.803033074e-1	3.801129e-001
10	1.0	1.276648322e+0	1.276496e+000

Tabela 5.28: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/D/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

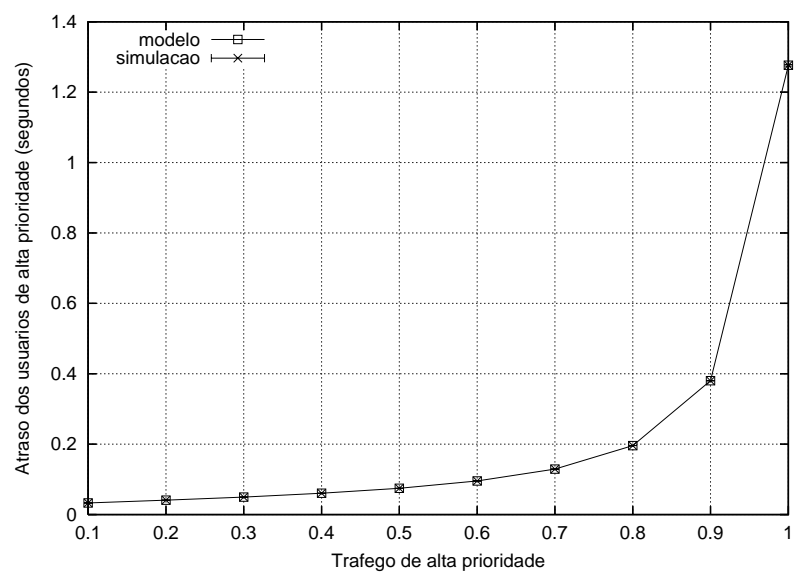


Figura 5.26: Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 5.28

Como pode ser observado nas Figuras 5.25 e 5.26, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e os limites para armazenar as unidades de informação são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. O valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Resultados obtidos para atraso no sistema MMBP/D/1/B

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	8.232142944e-3	8.232499e-003
2	0.332	8.994012008e-3	8.994800e-003
3	0.504	1.003225463e-2	1.003360e-002
4	0.70	1.266220001e-2	1.266316e-002
5	0.804	1.606880856e-2	1.606920e-002
6	0.90	2.308220789e-2	2.307971e-002
7	1.008	3.816979010e-2	3.819080e-002
8	1.104	5.107690774e-2	5.108080e-002
9	1.20	5.771274466e-2	5.771460e-002
10	1.308	6.089351803e-2	6.089820e-002

Tabela 5.29: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/D/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

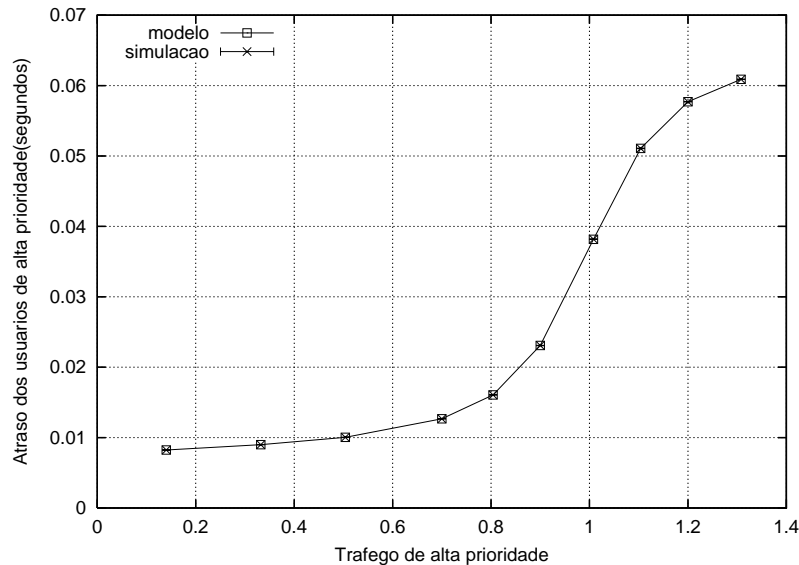


Figura 5.27: Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 5.29

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	1.269006760e-2	1.269030e-002
2	0.20	1.660092129e-2	1.660580e-002
3	0.332	2.595804746e-2	2.598320e-002
4	0.40	3.348908904e-2	3.348740e-002
5	0.504	5.004980378e-2	5.007220e-002
6	0.60	7.286776775e-2	7.286600e-002
7	0.70	1.100552349e-1	1.100717e-001
8	0.804	1.840439571e-1	1.840308e-001
9	0.90	3.669113987e-1	3.670776e-001
10	1.008	1.444481552e+0	1.445867e+000

Tabela 5.30: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/D/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

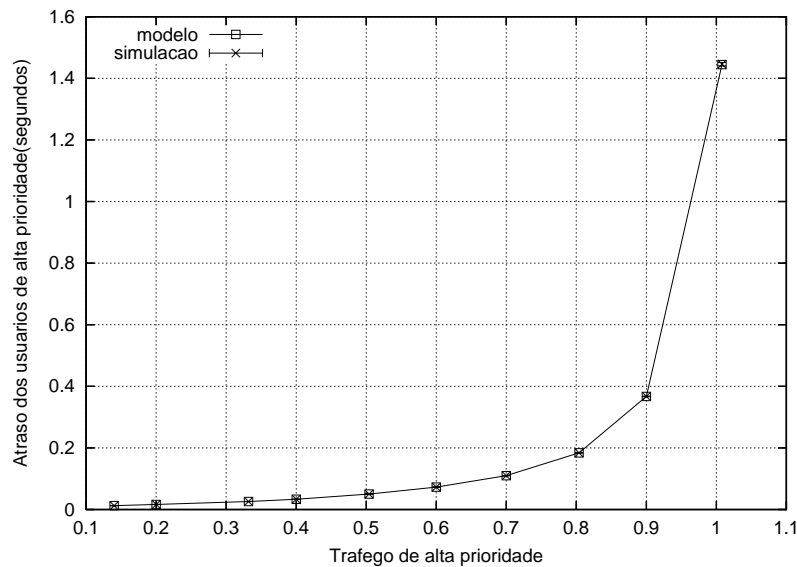


Figura 5.28: Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 5.30

Como pode ser observado nas Figuras 5.27 e 5.28, são utilizadas duas fontes para gerar os tráfegos de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e os limites para armazenar as unidades de informação são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. O valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

Análise dos Resultados

Assim como foi visto para os valores de perda, ao observar as Figuras 5.25, 5.26, 5.27 e 5.28 conclui-se que os resultados obtidos para o atraso de alta e baixa prioridade podem ser diretamente aplicados no desenvolvimento e aplicação de um projeto.

5.3 Comparação das disciplinas de fila analisadas

Como pode ser observado nos gráficos apresentados, os valores relativos à probabilidade de perda dos usuários de alta e baixa prioridade são similares nas arquiteturas *Threshold Dropping* e *Priority Scheduling*. No caso referente ao tráfego de alta prioridade, esta característica pode ser observada nas Figuras 5.1, 5.21, 5.5 e 5.23. Da mesma forma, o comportamento relativo ao fluxo de baixa é representado pelas Figuras 5.2, 5.22, 5.7 e 5.24. Portanto, caso um projeto releve somente os valores associados à probabilidade de perda do tráfego gerado, a opção escolhida entre as disciplinas de fila analisadas é indiferente.

Durante a análise dos valores de atraso, obtém-se características diferentes. No caso do tráfego de alta prioridade, devido ao funcionamento de ambas as disciplinas de fila, verifica-se que o atraso dos usuários deste fluxo é menor no sistema *Priority Scheduling* que o encontrado na disciplina *Threshold Dropping*. Este comportamento é observado nas Figuras 5.11, 5.25, 5.15 e 5.27. Ao analisar estes resultados também verifica-se que, quando o valor de ρ_a é elevado, o atraso de alta prioridade é similar em ambas as disciplinas de fila. Este fato ocorre pois, em ambas as arquiteturas, existe uma grande probabilidade de perda associada às unidades de informação de baixa prioridade.

Ao analisar o tráfego de baixa prioridade, conclui-se que o atraso destes usuários na disciplina *Threshold Dropping* é muito menor que o encontrado no sistema *Priority Scheduling*. Este comportamento está relacionado ao atendimento das unidades de informação armazenadas. Em outras palavras, enquanto a disciplina *Threshold*

Dropping serve os usuários admitidos de acordo com a ordem de chegada, a disciplina *Priority Scheduling* atende primeiramente o fluxo de alta prioridade. Esta característica pode ser observada nas Figuras 5.12, 5.26, 5.17 e 5.28. Desta forma, caso exista uma aplicação sensível ao atraso, a disciplina de fila *Priority Scheduling* deve ser aplicada.

Capítulo 6

Comparações com outros modelos de fila

O objetivo desta parte do trabalho é comparar os resultados analíticos obtidos nos capítulos 4 e 5 com sistemas associados à outros modelos encontrados na literatura. Desta forma, será possível realizar um estudo das características dos métodos matemáticos abordados, ressaltando as respectivas vantagens e desvantagens.

O trabalho apresentado por Sahu em [18] será utilizado como uma referência para a análise de desempenho dos modelos desenvolvidos nos capítulos anteriores. Nesta referência, são aplicadas as mesmas disciplinas de fila definidas nas seções 3.2 e 3.3 (*Threshold Dropping* e *Priority Scheduling*), mas considerando um parâmetro contínuo para a chegada e saída de unidades de informação. Portanto, a análise realizada em tempo discreto será adaptada para refletir as características abordadas em tempo contínuo.

Através de um estudo da referência [18], verifica-se que existem dois tipos de processos de chegadas de usuários: o primeiro considera um processo de Poisson e o segundo fontes *On-Off* [15]. Em ambos os casos, são utilizados os parâmetros λ_h e λ_l para representar as taxas médias de chegada dos usuários de alta e baixa prioridade, respectivamente. No caso do tempo de serviço, utiliza-se uma variável aleatória exponencial com parâmetro μ .

A partir das informações apresentadas, conclui-se que, a fim de refletir as características dos sistemas abordados por Sahu [18], o modelo analítico abordado deve considerar processos de Bernoulli para representar as chegadas e os tempos de atendimento das unidades de informação. Neste caso, enquanto o funcionamento das fontes de Poisson está diretamente associado a um processo de Bernoulli, as fontes *On-Off* utilizam variáveis aleatórias deste tipo para especificar as transições entre

os estados *On* e *Off*.

Apesar desta monografia não abordar diretamente o caso de fontes *On-Off*, pode-se verificar que as fontes *MMBP* englobam este tipo de emissão de usuários. Desta forma, serão apresentados os resultados obtidos dos modelos analíticos associados aos sistemas *GEOM/GEOM/1/B* e *MMBP/GEOM/1/B*.

Como poderá ser observado, considera-se os termos a_y^a e a_z^b como as probabilidades de serem gerados y e z unidades de informação de alta e baixa prioridade em um segmento de tempo, respectivamente. Através deste raciocínio, os valores EA_r^a e EA_r^b são definidos como os respectivos números médios de usuários de alta e baixa prioridade que chegam ao sistema. As expressões relacionadas à estes valores podem ser obtidas nas seções 5.2.4 e 5.2.5, considerando fontes de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica) e *MMBP*.

As estruturas das Cadeias de Markov também seguem as mesmas definições estabelecidas nos capítulos anteriores. Em outras palavras, enquanto os sistemas com fontes de Bernoulli consideram somente as variáveis aleatórias associadas ao número de usuários armazenados, os que utilizam fontes *MMBP* também utilizam as quantidades de fontes de alta e baixa prioridade no estado E_1 .

A seguir serão apresentados os resultados obtidos para os sistemas *GEOM/GEOM/1/B* e *MMBP/GEOM/1/B*. Os valores analíticos serão validados através de comparações com valores simulados.

6.1 Resultados obtidos

Nesta seção, os valores relacionados à probabilidade de perda e atraso dos fluxos de alta e baixa prioridade são obtidos do modelo analítico e comparados com simulações. A fim de descrever o sistema, utiliza-se os seguintes parâmetros: taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a), taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b), número de fontes de alta prioridade (n_a), número de fontes de baixa prioridade (n_b), probabilidade de um usuário ser atendido após um segmento de tempo (β), B_H e B_L . No caso das fontes *MMBP*, também serão incorporados os parâmetros p_{12} e p_{21} , ou seja, as probabilidades das fontes alterarem seu funcionamento do estado E_1 para E_2 e E_2 para E_1 , respectivamente.

Com o objetivo de realizar simulações, utilizou-se um programa desenvolvido em C++ que representa o funcionamento do sistema. Foi considerado um intervalo de

confiança de 95 por cento e um erro percentual menor ou igual a 2.5 por cento. Devido a precisão de diversas medidas, muitos erros pecentuais ficaram abaixo do valor de 2.5 por cento. É importante mencionar que, para extrair os valores de atraso, o simulador utilizou um segmento de tempo de 8ms. O ambiente de trabalho foi constituído dos programas Maple V, aplicado na obtenção dos resultados analíticos, e Visual C++ 6.0, onde o simulador foi desenvolvido.

Em relação à ordem de apresentação, primeiramente serão avaliados os resultados relativos à probabilidade de perda e, em seguida, os associados ao atraso. Após a apresentação dos gráficos e tabelas, será realizada uma análise do método matemático empregado.

6.1.1 Disciplina Threshold Dropping

Resultados obtidos para a probabilidade de perda no sistema GEOM/GEOM/1/ B_H :

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	1.233552730e-3	1.243333e-003
2	0.3	3.898768896e-2	3.896620e-002
3	0.5	1.604184704e-1	1.604140e-001
4	0.7	3.178165893e-1	3.178315e-001
5	0.8	3.886640473e-1	3.887362e-001
6	0.9	4.500767696e-1	4.500792e-001
7	1.0	5.022389208e-1	5.022328e-001
8	1.1	5.463052873e-1	5.462770e-001
9	1.2	5.836380620e-1	5.836856e-001
10	1.3	6.154854262e-1	6.154782e-001

Tabela 6.1: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

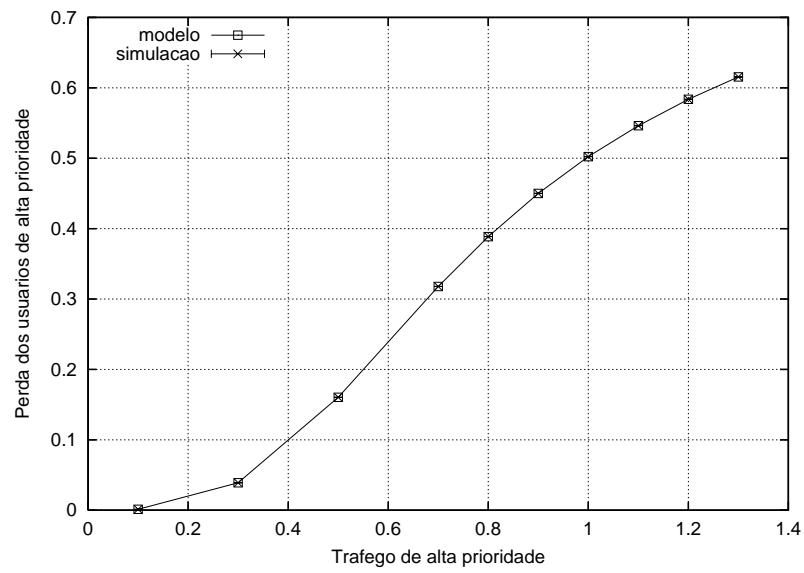


Figura 6.1: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.1

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	5.999531699e-1	6.000872e-001
2	0.3	7.883134780e-1	7.883392e-001
3	0.5	9.197916064e-1	9.197621e-001
4	0.7	9.775284350e-1	9.775192e-001
5	0.8	9.890687719e-1	9.890575e-001
6	0.9	9.949309093e-1	9.949290e-001
7	1.0	9.977610796e-1	9.977649e-001
8	1.1	9.990641840e-1	9.990614e-001
9	1.2	9.996343257e-1	9.996338e-001
10	1.3	9.998689460e-1	9.998702e-001

Tabela 6.2: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

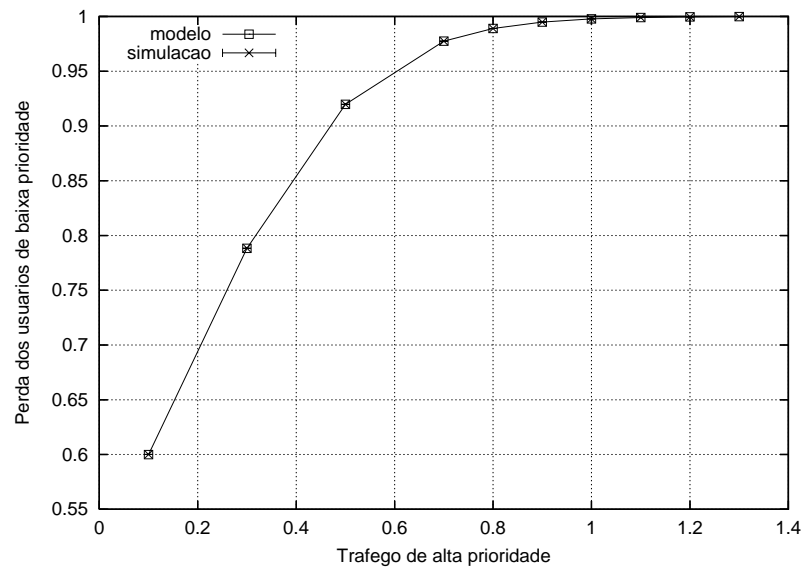


Figura 6.2: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.2

Na apresentação dos valores associados à probabilidade de perda nas Figuras 6.1 e 6.2, considera-se a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). Neste caso, o valor 1.0 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). A partir dos resultados obtidos, analisa-se o comportamento desta qualidade de serviço.

Como pode ser observado, são utilizadas duas fontes para gerar o tráfego de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e a probabilidade do usuário em atendimento concluir o seu serviço após um segmento de tempo é 0.5 ($\beta = 0.5$). Os limites para armazenar as unidades de informação de alta e baixa prioridade são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Resultados para probabilidade de perda no sistema MMBP/GEOM/1/B:

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	5.869668151e-4	5.990000e-004
2	0.332	4.097430004e-2	4.095560e-002
3	0.504	1.506692449e-1	1.506508e-001
4	0.70	3.121356456e-1	3.121876e-001
5	0.804	3.883582250e-1	3.883916e-001
6	0.90	4.486065446e-1	4.486680e-001
7	1.008	5.054265852e-1	5.054308e-001
8	1.104	5.476530767e-1	5.476803e-001
9	1.20	5.835316207e-1	5.834995e-001
10	1.308	6.177946473e-1	6.177412e-001

Tabela 6.3: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

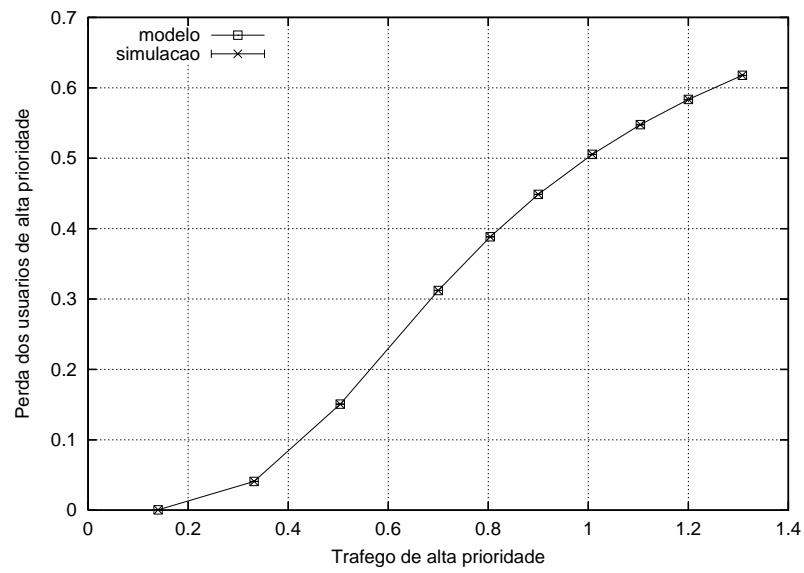


Figura 6.3: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.3

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	4.547100572e-2	4.570720e-002
2	0.332	1.810877216e-1	1.810534e-001
3	0.504	2.890881675e-1	2.890252e-001
4	0.70	3.990477383e-1	3.988714e-001
5	0.804	4.495873312e-1	4.495246e-001
6	0.90	4.913937382e-1	4.914968e-001
7	1.008	5.332287997e-1	5.332948e-001
8	1.104	5.662204359e-1	5.661534e-001
9	1.200	5.956927667e-1	5.957178e-001
10	1.308	6.251415732e-1	6.251918e-001

Tabela 6.4: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$

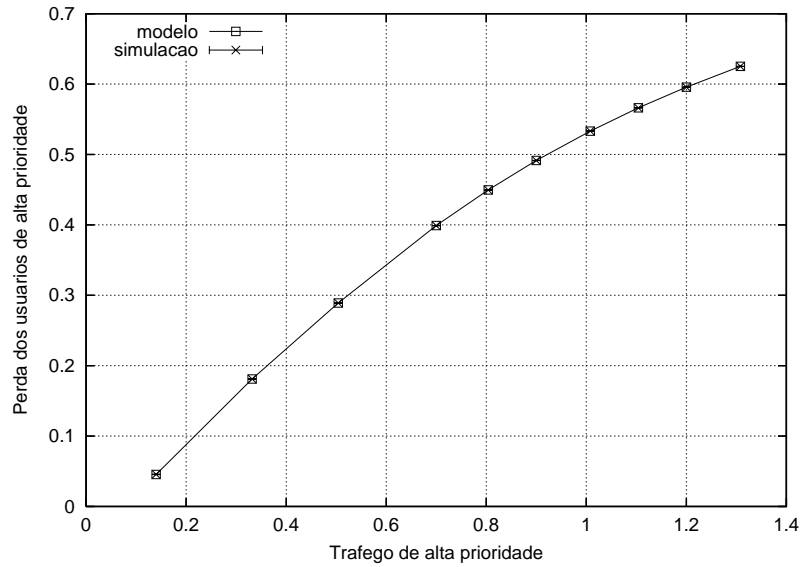


Figura 6.4: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.4

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	3.654354547e-1	3.647562e-001
2	0.332	6.089013638e-1	6.078682e-001
3	0.504	7.458370237e-1	7.451856e-001
4	0.70	8.521021683e-1	8.516313e-001
5	0.804	8.911729140e-1	8.909268e-001
6	0.90	9.190287273e-1	9.189525e-001
7	1.008	9.428738281e-1	9.428552e-001
8	1.104	9.588159726e-1	9.587787e-001
9	1.200	9.708977881e-1	9.708292e-001
10	1.308	9.809082568e-1	9.808704e-001

Tabela 6.5: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$

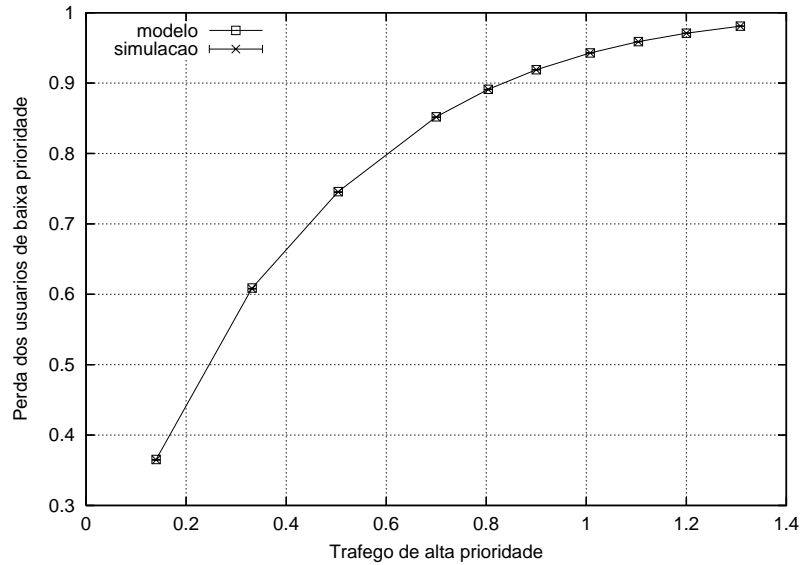


Figura 6.5: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.5

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	2.572257935e-1	2.573271e-001
2	0.332	6.432657966e-1	6.433824e-001
3	0.504	8.576189857e-1	8.575772e-001
4	0.70	9.633200901e-1	9.632829e-001
5	0.804	9.836535369e-1	9.836367e-001
6	0.90	9.925681647e-1	9.925648e-001
7	1.008	9.970833978e-1	9.970865e-001
8	1.104	9.987916817e-1	9.987903e-001
9	1.20	9.995278877e-1	9.995255e-001
10	1.308	9.998503994e-1	9.998480e-001

Tabela 6.6: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

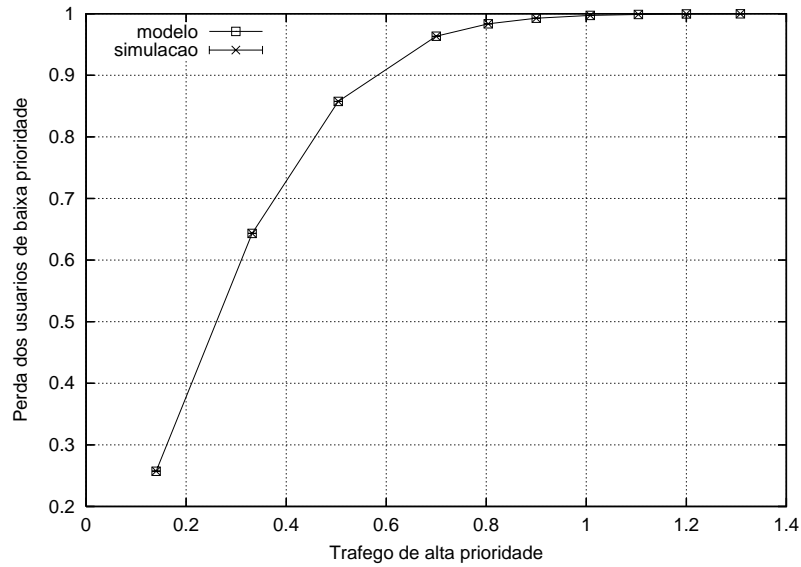


Figura 6.6: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.6

Durante a apresentação dos valores associados à probabilidade de perda nas Figuras de 6.3 a 6.6, considera-se a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). O valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). Os limites para armazenar as unidades de informação de alta e baixa prioridade são especificados através de dois conjuntos de valores. O primeiro considera $B_L = 5$ e $B_H = 8$ e o segundo $B_L = 2$ e $B_H = 3$. A partir dos resultados obtidos, analisa-se o comportamento desta qualidade de serviço.

Como pode ser observado, são utilizadas duas fontes para gerar o tráfego de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e a probabilidade do usuário em atendimento concluir o seu serviço após um segmento de tempo é 0.5 ($\beta = 0.5$). Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

É importante mencionar que as Figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.6 estão associadas ao caso em que somente pode ocorrer a perda de usuários quando o sistema não está vazio durante a chegada de unidades de informação ($B_L = 5$ e $B_H = 8$). No caso das Figuras 6.4 e 6.5 considera-se as situações em que ocorre perda de usuários quando o sistema está inicialmente vazio durante a chegada de tráfego ($B_L = 2$ e $B_H = 3$). Desta forma, todos os aspectos das expressões para probabilidade de perda são analisados e validados.

Resultados obtidos para atraso no sistema GEOM/GEOM/1/ B_H :

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	9.091630640e-2	9.092500e-002
2	0.3	9.965798608e-2	9.965780e-002
3	0.5	1.091622640e-1	1.091604e-001
4	0.7	1.168372826e-1	1.168332e-001
5	0.8	1.196489475e-1	1.196582e-001
6	0.9	1.218353830e-1	1.218348e-001
7	1.0	1.235029773e-1	1.235036e-001
8	1.1	1.247609921e-1	1.247596e-001
9	1.2	1.257043997e-1	1.257124e-001
10	1.3	1.264089560e-1	1.264034e-001

Tabela 6.7: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

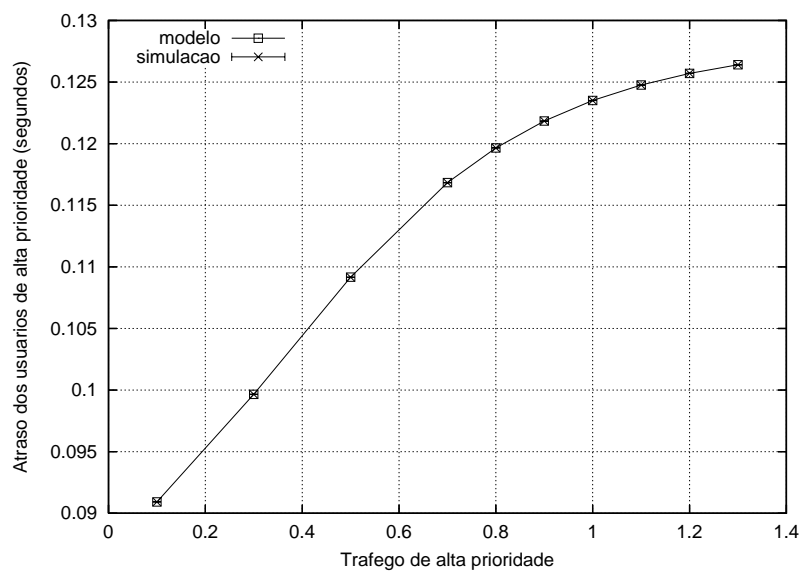


Figura 6.7: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.7

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	7.607358416e-2	7.608767e-002
2	0.3	7.738150427e-2	7.737941e-002
3	0.5	7.822516893e-2	7.821421e-002
4	0.7	7.880425045e-2	7.880517e-002
5	0.8	7.902686008e-2	7.901821e-002
6	0.9	7.921536949e-2	7.924961e-002
7	1.0	7.937524627e-2	7.938399e-002
8	1.1	7.951068722e-2	7.942980e-002
9	1.2	7.962499667e-2	7.965480e-002
10	1.3	7.972071512e-2	7.980020e-002

Tabela 6.8: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.00$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

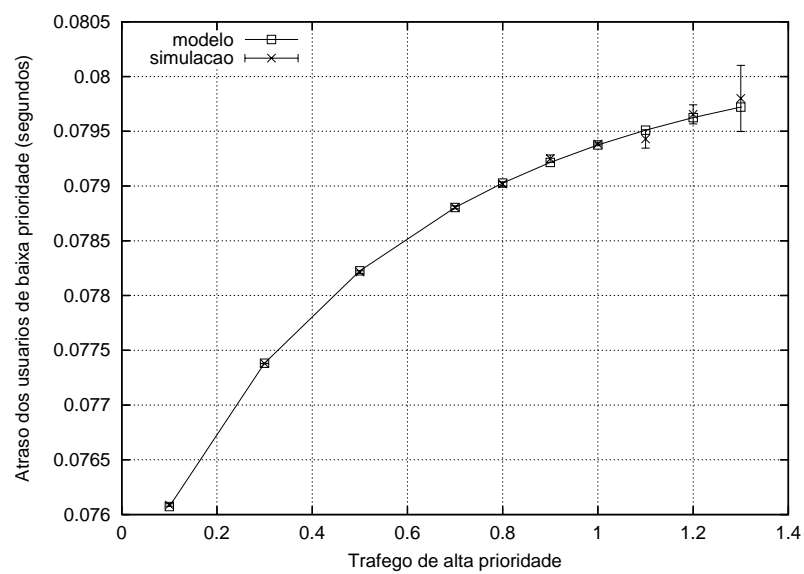


Figura 6.8: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.8

Na apresentação dos valores associados ao atraso nas Figuras 6.7 e 6.8, considere-se a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). Neste caso, o valor 1.0 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). A partir dos resultados obtidos, analisa-se o comportamento desta qualidade de serviço.

Como pode ser observado, são utilizadas duas fontes para gerar o tráfego de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e a probabilidade do usuário em atendimento concluir o seu serviço após um segmento de tempo é 0.5 ($\beta = 0.5$). Os limites para armazenar as unidades de informação de alta e baixa prioridade são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Resultados obtidos para atraso no sistema MMBP/GEOM/1/ B_H

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	6.931706667e-2	6.933358e-002
2	0.332	9.264958752e-2	9.265240e-002
3	0.504	1.056699397e-1	1.056652e-001
4	0.70	1.157051237e-1	1.157064e-001
5	0.804	1.191929949e-1	1.191956e-001
6	0.90	1.215627553e-1	1.215734e-001
7	1.008	1.235020205e-1	1.235007e-001
8	1.104	1.247536947e-1	1.247568e-001
9	1.200	1.256837172e-1	1.256832e-001
10	1.308	1.264499931e-1	1.264398e-001

Tabela 6.9: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

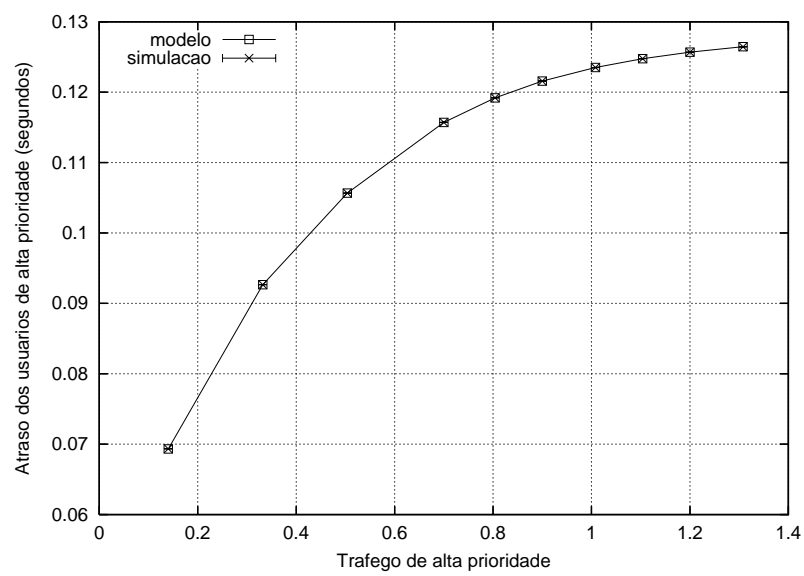


Figura 6.9: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.9

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	3.393645232e-2	3.394860e-002
2	0.332	3.839588493e-2	3.840040e-002
3	0.504	4.096858949e-2	4.096840e-002
4	0.70	4.321369310e-2	4.320080e-002
5	0.804	4.415721110e-2	4.415260e-002
6	0.90	4.489887303e-2	4.490980e-002
7	1.008	4.560318202e-2	4.560600e-002
8	1.104	4.612767584e-2	4.612720e-002
9	1.200	4.656820560e-2	4.657160e-002
10	1.308	4.697547611e-2	4.698140e-002

Tabela 6.10: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$

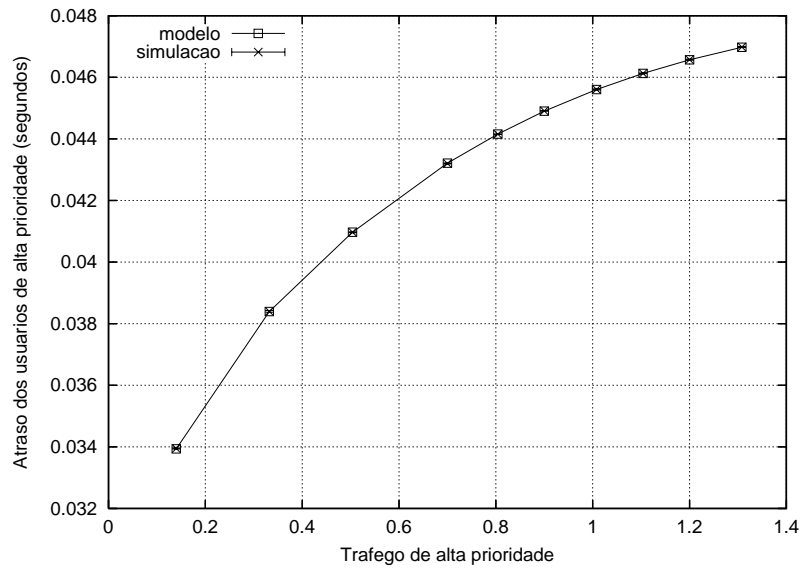


Figura 6.10: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.10

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	5.758387616e-2	5.757915e-002
2	0.332	6.916156059e-2	6.916960e-002
3	0.504	7.341100595e-2	7.340880e-002
4	0.70	7.610821166e-2	7.609340e-002
5	0.804	7.703509910e-2	7.699479e-002
6	0.90	7.769620774e-2	7.773019e-002
7	1.008	7.827713118e-2	7.833100e-002
8	1.104	7.868403966e-2	7.857225e-002
9	1.200	7.901095485e-2	7.887175e-002
10	1.308	7.930255586e-2	7.905824e-002

Tabela 6.11: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

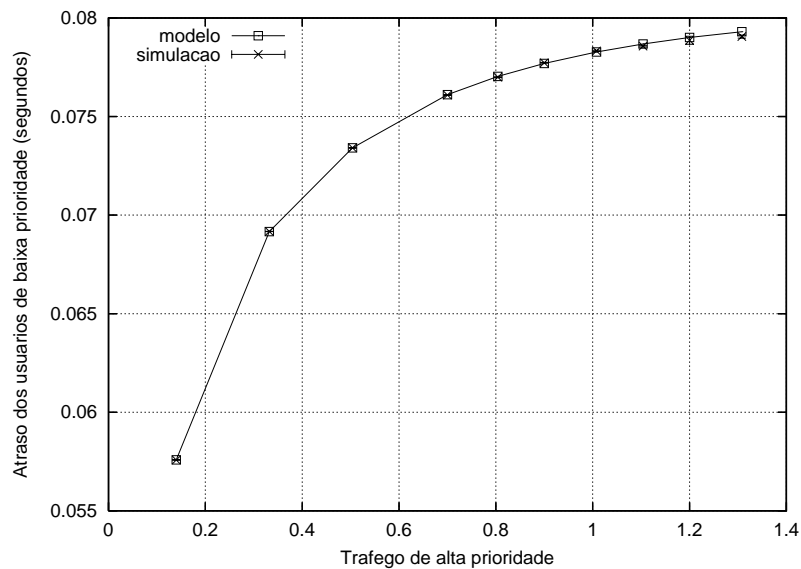


Figura 6.11: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.11

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	2.532268046e-2	2.529180e-002
2	0.332	2.731991078e-2	2.725080e-002
3	0.504	2.846792469e-2	2.838500e-002
4	0.70	2.949490962e-2	2.941680e-002
5	0.804	2.994108517e-2	2.984000e-002
6	0.90	3.030125018e-2	3.024500e-002
7	1.008	3.065358858e-2	3.061140e-002
8	1.104	3.092448077e-2	3.086900e-002
9	1.200	3.115923792e-2	3.113960e-002
10	1.308	3.138376165e-2	3.136700e-002

Tabela 6.12: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 2$ e $B_H = 3$

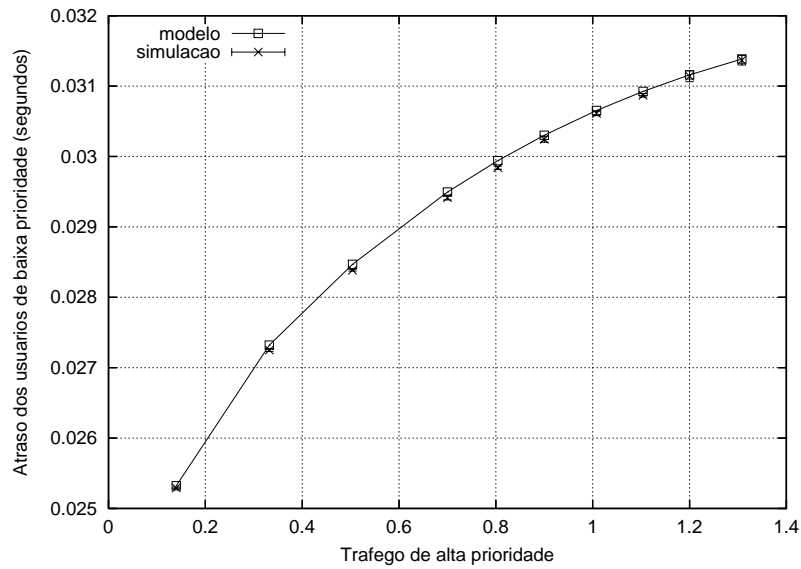


Figura 6.12: Representação gráfica dos valores de atraso na tabela 6.12

Durante a apresentação dos valores associados ao atraso nas Figuras de 6.9 a 6.12, considera-se a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). Neste caso, o valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). A partir dos resultados obtidos, analisa-se o comportamento desta qualidade de serviço.

Como pode ser observado, são utilizadas duas fontes para gerar o tráfego de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e a probabilidade do usuário em atendimento concluir o seu serviço após um segmento de tempo é 0.5 ($\beta = 0.5$). Os limites para armazenar as unidades de informação de alta e baixa prioridade são especificados através de dois conjuntos de valores. O primeiro considera $B_L = 5$ e $B_H = 8$ e o segundo $B_L = 2$ e $B_H = 3$. Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

De forma análoga aos resultados para a probabilidade de perda, os valores de atraso apresentados nas Figuras 6.7, 6.8, 6.9 e 6.11 estão associadas ao caso em que a perda de usuários somente ocorre quando o sistema não está vazio durante a chegada de unidades de informação. No caso das Figuras 6.10 e 6.12 considera-se as situações em que pode haver perda de usuários quando o sistema está vazio durante a chegada de tráfego.

6.1.2 Disciplina Priority Scheduling

Resultados obtidos para a probabilidade de perda no sistema GEOM/GEOM/1/B:

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	7.479474421e-8	0.000000e+000
2	0.3	1.147013729e-3	1.126600e-003
3	0.5	7.267441860e-2	7.267641e-002
4	0.7	2.874786054e-1	2.873734e-001
5	0.8	3.752143037e-1	3.752046e-001
6	0.9	4.444687117e-1	4.444860e-001
7	1.0	5.000025457e-1	5.000325e-001
8	1.1	5.454547858e-1	5.454459e-001
9	1.2	5.833333530e-1	5.833334e-001
10	1.3	6.153846167e-1	6.152743e-001

Tabela 6.13: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

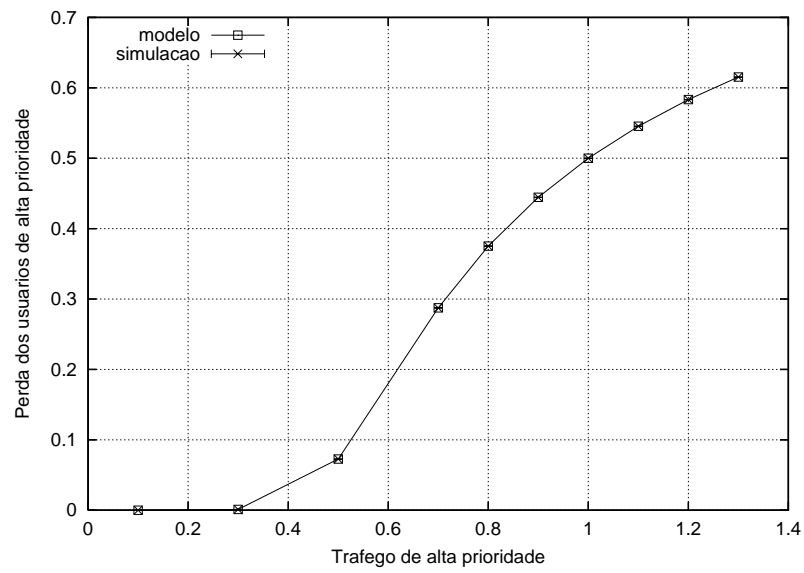


Figura 6.13: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.13

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	6.000724027e-1	6.000893e-001
2	0.3	7.996636907e-1	7.997262e-001
3	0.5	9.636630743e-1	9.637292e-001
4	0.7	9.987649780e-1	9.987548e-001
5	0.8	9.998285571e-1	9.998274e-001
6	0.9	9.999781595e-1	9.999780e-001
7	1.0	9.999974544e-1	9.999970e-001
8	1.1	9.999997355e-1	9.999995e-001
9	1.2	9.999999767e-1	1.000000e+000
10	1.3	9.999999984e-1	1.000000e+000

Tabela 6.14: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

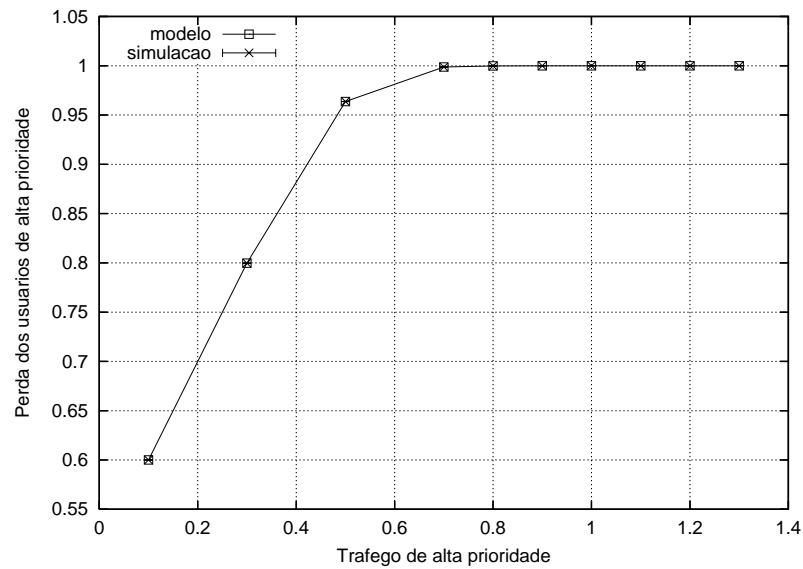


Figura 6.14: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.14

Na apresentação dos valores associados à probabilidade de perda nas Figuras 6.13 e 6.14, considera-se a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). Neste caso, o valor 1.0 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). A partir dos resultados obtidos, analisa-se o comportamento desta qualidade de serviço.

Como pode ser observado, são utilizadas duas fontes para gerar o tráfego de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e a probabilidade do usuário em atendimento concluir o seu serviço após um segmento de tempo é 0.5 ($\beta = 0.5$). Os limites para armazenar as unidades de informação de alta e baixa prioridade são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Resultados obtidos para probabilidade de perda no sistema MMBP/GEOM/1/B:

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	1.043184629e-7	0.000000e+000
2	0.332	2.839918519e-3	2.842200e-003
3	0.504	7.628800204e-2	7.633580e-002
4	0.70	2.874786054e-1	2.875208e-001
5	0.804	3.783061258e-1	3.783254e-001
6	0.90	4.444687117e-1	4.444915e-001
7	1.008	5.039703708e-1	5.039760e-001
8	1.104	5.471016674e-1	5.469764e-001
9	1.20	5.833333531e-1	5.832636e-001
10	1.308	6.177370040e-1	6.176950e-001

Tabela 6.15: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

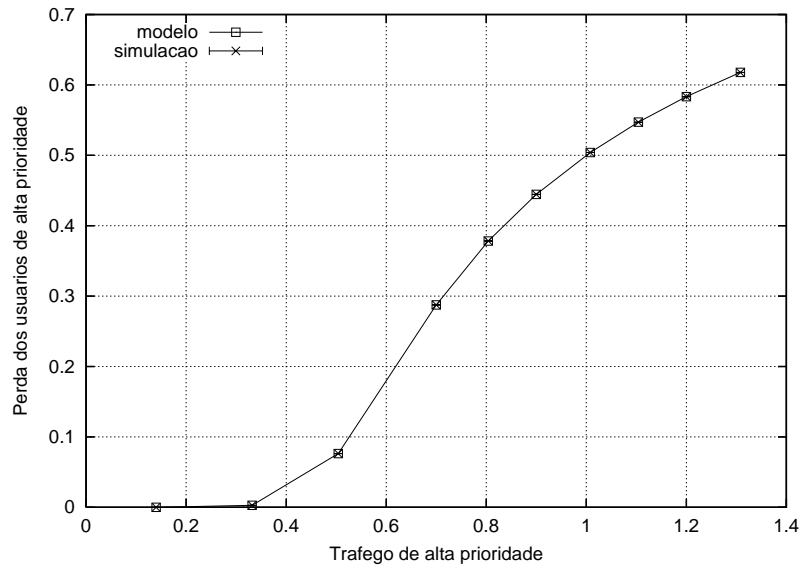


Figura 6.15: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.15

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	2.553869882e-1	2.555578e-001
2	0.332	6.674187147e-1	6.674622e-001
3	0.504	9.317588553e-1	9.318222e-001
4	0.70	9.975501380e-1	9.975530e-001
5	0.804	9.996862855e-1	9.996834e-001
6	0.90	9.999566668e-1	9.999563e-001
7	1.008	9.999957666e-1	9.999960e-001
8	1.104	9.9999995224e-1	9.999989e-001
9	1.20	9.9999999536e-1	9.999989e-001
10	1.308	9.999999973e-1	9.999989e-001

Tabela 6.16: Valores obtidos da simulação e do modelo para $perda_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

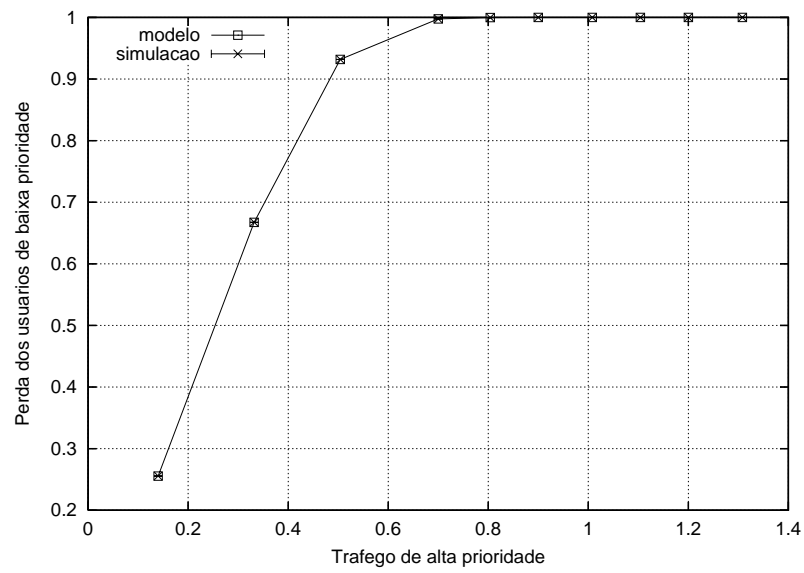


Figura 6.16: Representação gráfica dos valores para probabilidade de perda da tabela 6.16

Durante a apresentação dos valores associados à probabilidade de perda nas Figuras de 6.15 a 6.16, considera-se a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). O valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). A partir dos resultados obtidos, analisa-se o comportamento desta qualidade de serviço.

Como pode ser observado, são utilizadas duas fontes para gerar o tráfego de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e a probabilidade do usuário em atendimento concluir o seu serviço após um segmento de tempo é 0.5 ($\beta = 0.5$). Os limites para armazenar as unidades de informação de alta e baixa prioridade são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

Resultados obtidos para atraso no sistema $GEOM/GEOM/1/B$

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	1.849998803e-2	1.850950e-002
2	0.3	3.063318108e-2	3.061080e-002
3	0.5	7.218056427e-2	7.220520e-002
4	0.7	1.095065375e-1	1.094842e-001
5	0.8	1.167437354e-1	1.167484e-001
6	0.9	1.206910590e-1	1.206923e-001
7	1.0	1.230570218e-1	1.230473e-001
8	1.1	1.245918286e-1	1.245761e-001
9	1.2	1.256432128e-1	1.256480e-001
10	1.3	1.263883742e-1	1.263574e-001

Tabela 6.17: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema $GEOM/GEOM/1/B$ com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

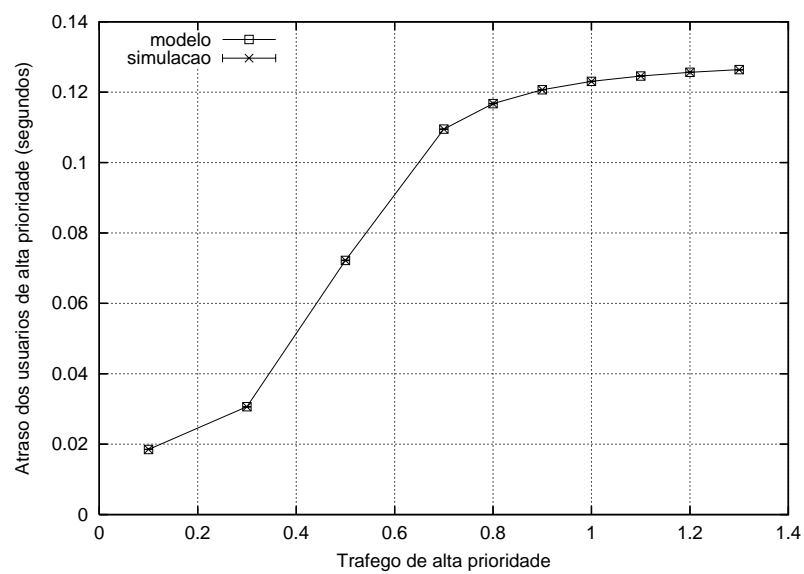


Figura 6.17: Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 6.17

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.1	9.555292936e-2	9.554775e-002
2	0.2	1.292181301e-1	1.292402e-001
3	0.3	1.958077552e-1	1.958628e-001
4	0.4	3.749029547e-1	3.748406e-001
5	0.5	1.097340399e+0	1.099116e+000
6	0.6	5.153203394e+0	5.182422e+000
7	0.7	3.238488288e+1	3.212931e+001
8	0.8	2.333107290e+2	2.334688e+002
9	0.9	1.831456884e+3	1.837104e+003
10	1.0	1.571338486e+4	1.585716e+004

Tabela 6.18: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema GEOM/GEOM/1/B com $\rho_b = 1.0$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

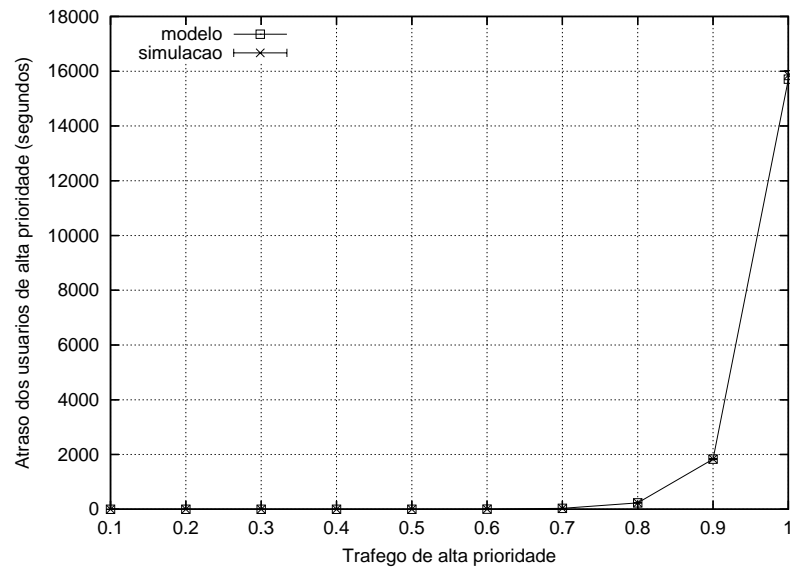


Figura 6.18: Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 6.18

Na apresentação dos valores associados ao atraso nas Figuras 6.17 e 6.18, considera-se a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). Neste caso, o valor 1.0 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). A partir dos resultados obtidos, analisa-se o comportamento desta qualidade de serviço.

Como pode ser observado, são utilizadas duas fontes para gerar o tráfego de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e a probabilidade do usuário em atendimento concluir o seu serviço após um segmento de tempo é 0.5 ($\beta = 0.5$). Os limites para armazenar as unidades de informação de alta e baixa prioridade são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. Nestas figuras também são consideradas fontes descritas por uma variável aleatória de Bernoulli (intervalos entre chegadas de usuários com distribuição geométrica).

Resultados obtidos para atraso no sistema MMBP/GEOM/1/B

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	1.862624585e-2	1.861940e-002
2	0.332	3.467908489e-2	3.468020e-002
3	0.504	7.324844374e-2	7.326460e-002
4	0.70	1.095065376e-1	1.095136e-001
5	0.804	1.169486198e-1	1.169542e-001
6	0.90	1.206910590e-1	1.206935e-001
7	1.008	1.232041241e-1	1.232036e-001
8	1.104	1.246416078e-1	1.246270e-001
9	1.20	1.256432129e-1	1.256202e-001
10	1.308	1.264380522e-1	1.264188e-001

Tabela 6.19: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{ap}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

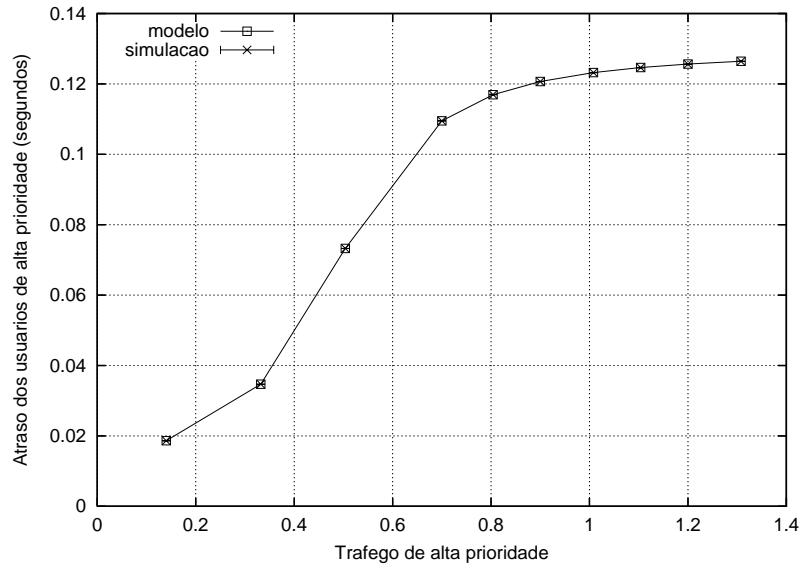


Figura 6.19: Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 6.19

	ρ_a	modelo	simulação
1	0.14	7.410592369e-2	7.411699e-002
2	0.20	1.101999910e-1	1.102158e-001
3	0.332	2.177537347e-1	2.177756e-001
4	0.40	3.612611001e-1	3.611202e-001
5	0.504	1.146381608e+0	1.147420e+000
6	0.60	5.144699470e+0	5.125590e+000
7	0.70	3.238177186e+1	3.241860e+001
8	0.804	2.529719995e+2	2.507188e+002
9	0.90	1.831495061e+3	1.819499e+003
10	1.008	1.874734947e+4	1.879990e+004

Tabela 6.20: Valores obtidos da simulação e do modelo para $atraso_{bp}$ em um sistema MMBP/GEOM/1/B com $\rho_b = 0.504$, $p_{12} = 0.6$, $p_{21} = 0.4$, $n_a = 2$, $n_b = 2$, $\beta = 0.5$, $B_L = 5$ e $B_H = 8$

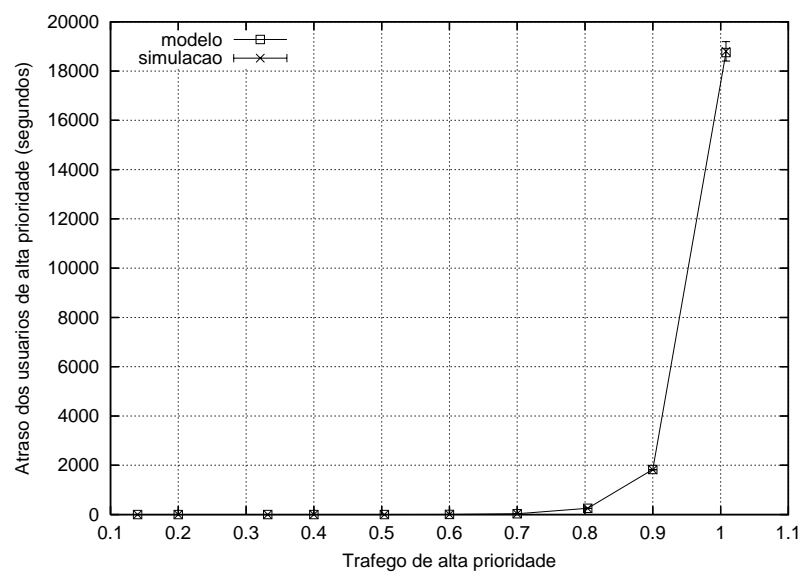


Figura 6.20: Representação gráfica dos valores para atraso da tabela 6.20

Durante a apresentação dos valores associados ao atraso nas Figuras 6.19 e 6.20, considera-se a variação da taxa média de chegada dos usuários de alta prioridade (ρ_a). Neste caso, o valor 0.504 é fixado para a taxa média de chegada dos usuários de baixa prioridade (ρ_b). A partir dos resultados obtidos, analisa-se o comportamento desta qualidade de serviço.

Como pode ser observado, são utilizadas duas fontes para gerar o tráfego de alta e baixa prioridade ($n_a = 2$ e $n_b = 2$) e a probabilidade do usuário em atendimento concluir o seu serviço após um segmento de tempo é 0.5 ($\beta = 0.5$). Os limites para armazenar as unidades de informação de alta e baixa prioridade são especificados através dos parâmetros $B_L = 5$ e $B_H = 8$. Nestas figuras também são consideradas fontes MMBP.

Análise dos Resultados

Através de uma análise, verifica-se que nos gráficos de 6.1 a 6.20 houve uma grande proximidade dos valores analíticos e simulados. Este fato indica a validade dos resultados obtidos para as qualidades de serviço analisadas.

6.2 Vantagens e desvantagens dos modelos analíticos

Ao comparar as expressões desenvolvidas para os sistemas GEOM/GEOM/1/B e MMBP/GEOM/1/B (capítulos 4 e 5) com as encontradas em [18], verifica-se as seguintes características:

- Enquanto o modelo com parâmetro discreto possibilita a abordagem de chegadas em grupo, o trabalho de Sahu não permite este funcionamento. A chegada de dois ou mais usuários em um segmento de tempo é um fator importante no estudo de redes de alta velocidade;
- Os resultados descritos em [15], relativos às qualidades de serviço e às probabilidades de transição dos estados da Cadeia de Markov, são mais simples que os apresentados nos capítulos 4 e 5;
- O trabalho apresentado neste capítulo e o desenvolvido por Sahu podem ser facilmente adaptados para considerar outros tipos de fontes de tráfego.

Neste ponto, a comparação dos modelos desenvolvidos com outros resultados analíticos existentes é finalizada.

Capítulo 7

Conclusão e Observações Finais

Ao avaliar os resultados analíticos obtidos neste trabalho, conclui-se que o objetivo proposto foi atingido. Em outras palavras, foi definido um modelo de filas em tempo discreto e sua validade foi confirmada através de simulações. Desta forma, esta tese apresenta um novo recurso para estudar e projetar arquiteturas voltadas ao fornecimento de qualidade de serviço na Internet.

Através de uma análise, pode-se verificar que as idéias desenvolvidas neste trabalho podem ser aplicadas em diversas arquiteturas Diffserv. Em termos gerais, o modelo relacionado à disciplina *Threshold Dropping* está relacionado aos casos em que tráfegos com prioridades distintas são armazenados na mesma fila. Na abordagem da disciplina *Priority Scheduling* encontra-se uma referência para os sistemas onde os fluxos com diferentes exigências de QoS estão associados à filas separadas. Em resumo, os resultados apresentados não representam um “produto final” e sim um “ponto de partida” para a modelagem de filas com diferenciação de serviços.

Outra característica importante desta tese está relacionada às definições dos tipos de emissão de usuários. Devido à utilização de fontes MMBP e Bernoulli, é possível utilizar a análise desenvolvida em casos associados à transmissões de vídeo e dados, respectivamente. A escolha das características do tráfego de entrada está relacionada à situações práticas, encontradas em redes que integram fluxos com diferentes exigências de qualidade de serviço.

Apesar de terem sido enfatizados os resultados para *probabilidade de perda* e *atraso*, outros dados de desempenho, como, por exemplo, *jitter*, também podem ser extraídos a partir das Cadeias de Markov abordadas. Desta forma, a abrangência deste trabalho está relacionada não somente às disciplinas de fila, mas também aos valores de qualidade de serviço.

7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Desenvolver modelos para outras arquiteturas com diferenciação de serviço;
- Especificar expressões para outros valores de QoS;
- Realizar a análise de desempenho de sistemas que utilizam fontes com características diferentes das abordadas;
- Analisar matematicamente as características de sistemas com distribuição geral para o tempo de serviço.

Referências Bibliográficas

- [1] BLAKE, S., BLACK, D., CARLSON, M., et al., *An Architecture for Differentiated Services*, RFC - 2475, December 1998
- [2] DOVROLIS, C., RAMANATHAN P., “A Case for Relative Differentiated Services and the Proportional Differentiation Model”, *IEEE Network*, v. 13, n. 5, pp. 26-34, September/October 1999.
- [3] BAUMGARTNER, F., BRAUN, T., HABEGGER, P., “Differentiated Services: A New Approach for Quality in the Internet” *Proceedings of the 8th IFIP Conference on High Performance Networking-HPN’98*, September 1998. url: <http://www.gta.ufrj.br/diffserv/hpn98.ps.gz>
- [4] DI, Z., MOUFTAH, H. T., “Performance Evaluation of Per-Hop Forwarding Behaviours in the Diffserv Internet”, *5th IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC 2000)*, pp. 334-339, France, July 2000.
- [5] JIA, D., DUTKIEWICZ, E., CHICHARO, J. F., “Performance Analysis of QoS Mechanisms in IP Networks”, *5th IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC 2000)*, pp. 359-363, France, July 2000.
- [6] ALVES, I. B. H. A., REZENDE, J. F., MORAES, L. F. M., “Avaliando a Justiça na Marcação de Tráfegos Agregados”, *XVIII Simpósio Brasileiro de Redes de Computadores SBRC2000*, pp.119-134, Belo Horizonte, May 2000.
- [7] SEMRET, N., LIAO, R. R.-F., CAMPBELL, A. T., et al., “Market Pricing of Differentiated Internet Services”, *7th IEEE/IFIP International Workshop on Quality of Service(IWQOS’99)*, pp. 184-193, London, May 1999.
- [8] AIELLO, W. A., MANSOUR, Y., RAJAGOPOLAN, S., et al., “Competitive Queue Policies for Differentiated Services” *Proceedings of the IEEE INFOCOM*, pp. 431-440, Tel-Aviv, Israel, March 2000

- [9] ZIVIANI, A., REZENDE, J. F., DUARTE, O. C. M. B., “Towards a Differentiated Services Support for Voice Traffic”, *Proceedings of the IEEE Global Telecommunications Conference - GLOBECOM*, pp. 59-63, Rio de Janeiro, Brazil, December 1999
- [10] BASU, A., WANG, Z., “A Comparative Study of Schemes for Differentiated Services”, Bell Laboratories Technical Report, Lucent Technologies, August 1998. url: <http://www.gta.ufrj.br/diffserv/diffserv.pdf.gz>
- [11] SEMRET N., LIAO, R.R.-F., CAMPBELL, A. T., LAZAR, A. A., “Peering and Provisioning of Differentiated Internet Services”, *Proceedings of the IEEE INFOCOM*, Tel-Aviv, Israel, March 2000
- [12] GRAINVILLE, L. Z., GASPARY, L., TAROUÇO, L. M. R., “Uma proposta para fornecimento de QoS para Aplicações Legadas em Redes TCP/IP”, *Workshop de TMN*, pp. 81-93, Belo Horizonte - MG, Maio 2000.
- [13] ROSS, S.M., *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 1972
- [14] KLEINROCK, L., *Queueing Systems*, v. 1 e 2, New York, John Wiley & Sons, 1975
- [15] SCHWARTZ, M., *Broadband Integrated Networks*, Prentice Hall, 1996.
- [16] MAY, M., BOLOT, J-C., DIOT, C. e JEAN-MARIE, A., “Simple Performance Models of Differentiated Services Schemes for the Internet”, *Proceedings of IEEE INFOCOM*, pp. 1385-1394, New York, March 1999.
- [17] REZENDE, J. F., “Assured Service Evaluation”, *Proceedings of the IEEE GLOBECOM*, pp. 100-104, December 1999.
- [18] SAHU, S., TOWNSLEY, D., KUROSE, J., “A Quantitative Study of Differentiated Services for the Internet”, *Proceedings of IEEE GLOBECOM*, pp. 1808-1817, Rio de Janeiro, December 1999.
- [19] ZHENG, L., ZHANG, L., “Modeling and Performance Analysis for IP Traffic with Multi-Class QoS in VPN”, *IEEE Military Communications Conference (MILCOM 2000)*, n. 1, pp. 330-334, October 2000

- [20] ZHENG, P., NI, L. M., “The Impact of Non-DS Domains in a Multi-Domain DiffServ Network”, *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN 2002)*, Florida, October 2002
- [21] FIROIU, V., BOUDEC, J-Y. L., TOWNSLEY, D., et al., “Theories and Models for Internet Quality of Service”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 90, n. 9, September 2002
- [22] CHAIT, Y., HOLLOT, C. V., MISRA, V., et al., “Providing Throughput Differentiation for TCP Flows Using Adaptive Two-Color Marking and Two-Level AQM”, *Proceedings of the IEEE INFOCOM*, vol. 2, pp. 837-844, New York, June 2002.
- [23] IIDA, K., KAWAHARA, K., TAKINE, T., et al., “Performance Evaluation of the Architecture for End-to-End Quality-of-Service Provisioning”, *IEEE Communications Magazine*, vol. 38, n. 4, pp.76-81, April 2000.
- [24] YEOM, I., REDDY, A. L. N., “Modelling TCP Behaviour in a Differentiated Services Network”, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 9, n. 1, February 2001.
- [25] REISSLEIN, M., ROSS, K. W., RAJAGOPAL, S., “A Framework for Guaranteeing Statistical QoS”, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 10, n. 1, February 2002.
- [26] KUMAR, K. B., “Discrete-Time Queueing Systems and Their Networks”, *IEEE Transactions on Communications*. v. Com-28, n. 2, pp. 260-263, February 1980.
- [27] JAFARI, R., SOHRABY, K., “General Discrete-Time Queueing Systems with Correlated Batch Arrival and Departures”, *Proceedings of the IEEE INFOCOM*, vol. 1, pp. 181-188, March 2000.
- [28] LI, S. -Q., “A General Solution Technique for Discrete Queueing Analysis of Multimedia Traffic on ATM”, *IEEE Transactions on Communications*, v. 39, n. 7, pp. 1115-1132, July 1991.
- [29] RIBEIRO, M. R. N., O’MAHONY, M., “On the Performance Benefits of WDM and Wavelength Conversion in Photonic Packet Switching Nodes”, *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, v.15, n.1, pp. 1-9, Junho 2000

- [30] BORELA, A., CHIALARUCE F., MESCHINI, F., “Statistical multiplexing of random processes in packet switching networks”, *IEEE Proceedings-Communications*, v. 143, n. 5, pp. 325-334, October 1996.
- [31] MCKINNON, M. W., ROUSKAS, G. N., PERROS H. G., “Queueing-Based Analysis of Broadcast Optical Networks”, *Proceedings of ACM SIGMETRICS/PERFORMANCE 98*. ACM, pp. 121-130, June 1998. url: <http://www.csc.ncsu.edu/faculty/GRouskas/Ar0ra/Conferences/SIGMETRICS-McKinnon-1998.pdf>
- [32] SHULZRINNE, H., KUROSE, J. F., TOWNSLEY, D. F., “Loss Correlation for Queues With Single and Multiple Input Streams”, *IEEE Int. Conference on Communications*, 1992. url: <http://citeseer.nj.nec.com/schulzrinne92loss.html>
- [33] SHULZRINE, H., KUROSE, J. F., “Distribution of the Loss Period for Some Queues in Continuous and Discrete Time”, *Proceedings of INFOCOM*, pp. 1446-1455, April 1991.
- [34] KAWAHARA, K., OIE, Y., MURATA, M., MIYAHARA, H., “Performance Analysis of Backpressure Congestion Control: Preliminary Case”, *Proceedings of IEEE GLOBECOM*, pp. 304-309, November 1995. url: http://nile.cse.kyutech.ac.jp/kawahara/study/backpressure_e.ps.gz
- [35] HLUCHYJ, M. G., KAROL, M. J., “Queueing in High-Performance Packet Switching”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 6, n. 9, pp. 1587-1597, December 1988.
- [36] KIM, H. S., LEON-GARCIA, A., “A Self-Routing Multistage Switching Network for Broadband ISDN”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 8, n. 3, pp. 459-466, April 1990.
- [37] SCHMOOKLER, M. S., 1970, *Limited Capacity Discrete Time Queues With Single Or Bulk Arrival*, IBM TR 00.2048.
- [38] MURATA, M., OIE, Y., SUDA, T., MIYAHARA H., “Analysis of a Discrete-Time Single-Server Queue with Bursty Inputs for Traffic Control in ATM Networks”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v.8, n.3, pp. 447-458 , April 1990.

- [39] GOTTFRIED, B. S., *Programando em C*, Makron Books, 1993.
- [40] SCHILDT, H., *C Completo e Total*, 3 ed., Makron Books, 1996.
- [41] MIZRAHI, V. V., *Treinamento em Linguagem C++ - Módulo 2*, Makron Books, 1995.
- [42] JAMSA, K., KLANDER, L., *Programando em C/C++ - A Bíblia*, Makron Books, 1999.
- [43] LAW, A. M., KELTON, W. D., *Simulation Modeling and Analysis*, 3 ed, New York, McGraw-Hill, 2000.
- [44] *Maple V - Learning Guide*, Waterloo Maple Inc, 1998.
- [45] *Maple V - Programming Guide*, Waterloo Maple Inc, 1998.
- [46] RUBIN, I., TSAI Z. H., “Message Delay Analysis of Multiclass Priority TDMA, FDMA, and Discrete-Time Queueing Systems”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 35, n. 3, pp. 637-647, May 1989.
- [47] DOMINGUES, G. M. B., 1998, *Modelagem e desempenho de arquiteturas de comutadores ATM com armazenamento nas saídas e diferentes classes de tráfego e prioridades*. Tese de M.Sc., COPPE(UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Apêndice A

Solução de um sistema linear criado quando forem definidas as probabilidades da cadeia de Markov

Uma vez estabelecidas as cadeias de Markov, as probabilidades de estar em cada um dos estados é calculada da seguinte forma:

$$q_1 = \pi_{11}q_1 + \pi_{21}q_2 + \pi_{31}q_3 + \cdots + \pi_{B1}q_B$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$q_B = \pi_{1B}q_1 + \pi_{2B}q_2 + \pi_{3B}q_3 + \cdots + \pi_{BB}q_B$$

Através de uma pequena manipulação algébrica, encontra-se:

$$0 = (\pi_{11} - 1)q_1 + \pi_{21}q_2 + \pi_{31}q_3 + \cdots + \pi_{B1}q_B$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$0 = \pi_{1B}q_1 + \pi_{2B}q_2 + \pi_{3B}q_3 + \cdots + (\pi_{BB} - 1)q_B$$

Como o conjunto de equações acima é linearmente dependente, substitui-se a última equação por $\sum_{i=1}^B q_i = 1$. Desta forma, temos:

$$0 = (\pi_{11} - 1)q_1 + \pi_{21}q_2 + \pi_{31}q_3 + \cdots + \pi_{B1}q_B$$

$$0 = \pi_{12}q_1 + (\pi_{22} - 1)q_2 + \pi_{32}q_3 + \cdots + \pi_{B2}q_B$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$1 = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_B$$

Em forma matricial, tem-se:

$$XA = Y$$

$$X = [q_1, q_2, q_3, \cdots, q_B]$$

$$Y = [0, 0, 0, \cdots, 1]$$

$$A = \begin{pmatrix} \pi_{11} - 1 & \pi_{12} & \cdots & 1 \\ \pi_{21} & \pi_{22} - 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_{B1} & \pi_{B2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Através da manipulação matricial abaixo, encontra-se o vetor X:

$$X = YA^{-1}$$

onde X representa os estados da cadeia de Markov.

Apêndice B

Análise e solução de um sistema GEOM/G/1/B com transições unitárias

O objetivo deste apêndice é obter uma relação entre as probabilidades do sistema estar em cada estado da cadeia de Markov proposta. A partir desta informação, pode-se obter probabilidades de perda do sistema.

Considerações Preliminares:

Os resultados obtidos têm como base as seguintes premissas:

1. Tempo entre chegadas sem memória (Bernoulli) \implies (BASTA - Bernoulli Arrivals See Time Averages);
2. A variável de estado representa a quantidade de usuários no sistema;
3. Somente são permitidas transições de um estado para os seus vizinhos mais próximos, ou seja, $\pi_{ij} = 0$ para $j > i + 1$ e $j < i - 1$.

Análise do sistema:

A partir dos dados acima, elabora-se a Cadeia de Markov definida na figura B.1. Assim como nas Cadeias de Markov anteriores, a fim de simplificar a figura, nem todas as transições de estado foram colocadas.

Em seguida, monta-se a seguinte equação matricial:

$$q = q\Pi$$

onde

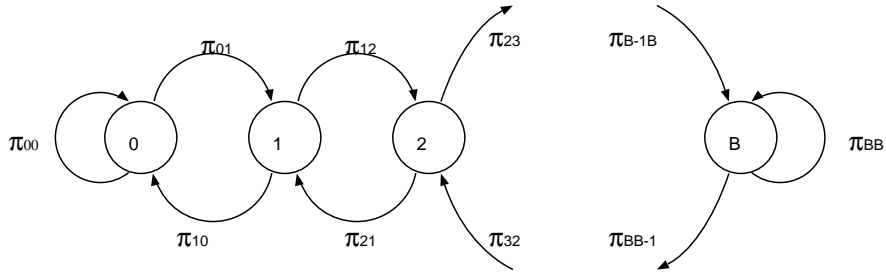


Figura B.1: Cadeia de Markov, seguindo uma distribuição geométrica, com a possibilidade de chegada de 1 usuário por segmento de tempo

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} & 0 & 0 & \dots \\ \pi_{10} & 1 - \pi_{12} - \pi_{10} & \pi_{12} & 0 & \dots \\ 0 & \pi_{21} & 1 - \pi_{23} - \pi_{21} & \pi_{23} & \dots \\ 0 & 0 & \pi_{32} & 1 - \pi_{34} - \pi_{32} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Inicialmente resolve-se as seguintes equações:

1. $(1 - \pi_{01})q_0 + \pi_{10}q_1 = q_0$
 $\implies q_1 = \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}}q_0$
2. $\pi_{01}q_0 + (1 - \pi_{12} - \pi_{10})q_1 + \pi_{21}q_2 = q_1$
 $\implies q_2 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{21}}q_1$

Tendo em vista as expressões obtidas em 1 e 2, procura-se demonstrar a seguinte relação por indução:

$$q_k = \frac{\pi_{k-1k}}{\pi_{kk-1}}q_{k-1}$$

Demonstração:

Supondo-se que a expressão acima é válida até q_{k-1} , deve-se provar que ela pode ser aplicada em q_k .

Utilizando uma expressão análoga a 2, tem-se:

$$\pi_{k-2k-1}q_{k-2} + (1 - \pi_{k-1k} - \pi_{k-1k})q_{k-1} + \pi_{kk-1}q_k = q_{k-1}$$

Como $q_{k-1} = \frac{\pi_{k-2k-1}}{\pi_{k-1k-2}}q_{k-2}$, então:

$$q_k = \frac{\pi_{k-1k}}{\pi_{kk-1}}q_{k-1} \quad \text{(demonstração concluída)}$$

Desta forma, para $k=B_H^{TD}$, temos:

$$q_{B_H^{TD}} = \frac{\pi_{B_H^{TD}-1B_H^{TD}} \cdots \pi_{01}}{\pi_{B_H^{TD}B_H^{TD}-1} \cdots \pi_{10}}q_0$$